А.Г. КОРЯНОВ, А.А. ПРОКОФЬЕВ

Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников

Лекции 1–4

Москва
Педагогический университет
«Первое сентября»
2012

Анатолий Георгиевич Корянов,
Александр Александрович Прокофьев

Материалы курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников» : лекции 1–4. – М. : Педагогический университет «Первое сентября», 2012. – 104 с.

Учебно-методическое пособие

Редактор П.М. Камаев
Корректор Л.А. Громова
Компьютерная верстка Д.В. Кардановская

Подписано в печать 19.11.2011.
Формат 60×90/16. Гарнитура «SchoolBook»
Печать офсетная. Печ. л. 6,5
Тираж 400 экз. Заказ №
Педагогический университет «Первое сентября»,
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
http://edu.1september.ru

Учебный план

№ брошюры	Название лекции
1	**Лекция 1.** ***Арифметический и алгебраический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях.*** **Основные теоретические сведения. Методические указания по использованию арифметического и алгебраического способов отбора корней. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности**
1	**Лекция 2.** ***Геометрический и функционально-графический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях.*** **Основные теоретические сведения. Методические указания по использованию геометрического и функционально-графического способов отбора корней. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности**
1	**Лекция 3.** ***Решение неравенств алгебраическими методами.*** **Классификация неравенств. Использование основных схем равносильных переходов к рациональным неравенствам или их системам. Разбор типичных ошибок. Методические указания по обучению применения алгебраических методов. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности**
1	**Лекция 4.** ***Решение неравенств функционально-графическими методами.*** **Методические указания по обучению и устранению ошибок в применении функционально-графических методов. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности.** ***Контрольная работа № 1***
2	**Лекция 5.** *Использование вычислительного метода для решения задач С2.* Основные теоретические сведения и формулы, набор опорных задач. Методические указания по обучению. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности
2	**Лекция 6.** *Использование координатного метода для решения задач С2.* Основные теоретические сведения и формулы, набор опорных задач. Методические указания по обучению. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности. ***Контрольная работа № 2***
2	**Лекция 7.** *Многовариантные планиметрические задачи, связанные с взаимным расположением элементов фигуры.* Основные теоретические сведения и формулы. Методические указания по обучению. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности
2	**Лекция 8.** *Многовариантные планиметрические задачи с неоднозначностью взаимного расположения фигур.* Основные теоретические сведения и формулы. Методические указания по обучению. Примеры решения заданий повышенного уровня сложности. ***Итоговая работа***

Лекция 1
Арифметический и алгебраический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

Задание С1 контрольно-измерительных материалов в последние два года содержало тригонометрические выражения (в 2010 году — системы уравнений, в 2011 году — уравнение). Процент успешного выполнения этого задания на экзамене в 2010 г. составил около 20%. Основные недостатки математической подготовки учащихся: ошибки в формулах решения простейших тригонометрических уравнений; при получении ответа не учитывалась область определения уравнения; неправильное применение тригонометрических формул; незнание свойств тригонометрических и обратных тригонометрических функций; плохое владение способами отбора корней, удовлетворяющих тем или иным ограничениям, неумение пользоваться тригонометрической окружностью.

Как правило, учитель знакомит учеников с наиболее распространенным способом отбора корней, применяя тригонометрическую окружность, в меньшей степени использует арифметический или алгебраический подходы. С другой стороны, ученик, знающий несколько приемов отбора корней, может при решении задачи выбрать более рациональный. Мы постараемся показать на примерах различные методы и способы отбора корней. Сразу отметим, что представленные решения не являются «образцами оформления» заданий. В примерах отражены решения, характерные на этапе обучения учащихся. На этапе контроля решения заданий могут быть сжаты и отражать только существенные моменты.

Напомним, что полное правильное решение задания С1 с развернутым ответом оценивается 2 баллами. Допускаются различные способы решения и записи развернутого ответа. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Экзаменующийся должен явно продемонстрировать владение выбранным им методом решения.

При решении различных уравнений школьникам приходится сталкиваться с понятием «посторонних» корней, появляющихся в результате неравносильных преобразований данного уравнения. Как правило, это связано с расширением области допустимых значений неизвестной в решаемом уравнении. Для получения правильного ответа возникающие «посторонние» корни необходимо исключить.

Аналогичная ситуация возникает и при решении тригонометрических уравнений и их систем. Однако она отличается от ситуаций, возникающих при решении дробно-рациональных, иррациональных, логарифмических и других уравнений, тем, что при решении простейших тригонометрических уравнений возникают бесконечные серии решений, зависящих от целочисленного параметра.

В данной лекции мы не останавливаемся на методах решения тригонометрических уравнений, так как эти вопросы достаточно широко освещены в учебниках.

При отборе корней в процессе решения тригонометрических уравнений обычно используют один из следующих **способов**.

Арифметический способ:

• непосредственная подстановка полученных корней в уравнение и имеющиеся ограничения;

• перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней.

Алгебраический способ:

• решение неравенства относительно целочисленного параметра и вычисление корней;

• исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.

Геометрический способ:

• изображение корней на тригонометрической окружности и их отбор с учетом имеющихся ограничений;

• изображение корней на числовой прямой с последующим отбором и учетом имеющихся ограничений.

Функционально-графический способ:

• отбор корней с использованием графиков простейших тригонометрических функций.

В настоящей лекции будет рассмотрено применение арифметического и алгебраического способов.

Предварительные замечания

Замечание 1. О сравнении чисел

Проверка экзаменационных работ показывает, что многие учащиеся делают ошибки при сравнении чисел, заданных в разной форме, например, $\frac{3}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Поэтому полезно в учебном процессе уделить этому вопросу должное внимание, решая упражнения следующего вида.

1. Расставьте в порядке убывания числа:

$$\frac{\pi}{2},\ 3\frac{1}{8},\ \pi,\ \frac{1}{2},\ \frac{\pi}{6},\ 2{,}5,\ \frac{5\pi}{6}.$$

2. Расставьте в порядке возрастания числа:

$$-\frac{3}{2},\ -\frac{2\pi}{3},\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{6},\ -2.$$

3. Сравните числа: $\operatorname{arctg}\frac{5}{4},\ \frac{\pi}{4},\ 1.$

Замечание 2. Формулы записи решений простейших тригонометрических уравнений

Следует уделить внимание и решению простейших тригонометрических уравнений, к которым тем или иным способом приводятся сложные тригонометрические уравнения. Прочное знание формул решения простейших тригонометрических уравнений и умение отметить их на тригонометрической окружности позволит учащимся избежать досадных ошибок.

Для записи решений простейших уравнений используются общие формулы серии решений (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Формулы решения простейших тригонометрических уравнений

Вид уравнения	**Общая формула серии решений**
$\sin x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\cos x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

В приведенных формулах n выполняет роль целочисленного параметра.

Следует обратить внимание учащихся, что в случае отбора корней применение общей формулы серии решений для синуса и косинуса не всегда является удобным. В этом случае удобнее не объединять серии решений, а представлять их совокупностью.

При повторении формул решения уравнений следует обратить внимание учащихся на то, что эти формулы задают множества чисел, которые образуют арифметические прогрессии с разностью 2π для синуса и косинуса и π для тангенса и котангенса.

1. Решения уравнения $\sin x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений:

$$x = \left[\begin{array}{l}\arcsin a + 2\pi n\\ \pi - \arcsin a + 2\pi n,\end{array}\right. n \in \boldsymbol{Z}.$$

Уравнения $\sin x = 1$, $\sin x = -1$ и $\sin x = 0$ имеют решения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ и $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, соответственно.

2. Решения уравнения $\cos x = a$ $(-1 < a < 1)$ можно записать совокупностью двух серий решений:

$$x = \left[\begin{array}{l}\arccos a + 2\pi n\\ -\arccos a + 2\pi n,\end{array}\right. n \in \boldsymbol{Z}.$$

Уравнения $\cos x = 1$, $\cos x = -1$ и $\cos x = 0$ имеют решения $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, соответственно.

3. Решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$ можно записать совокупностью двух серий решений:

$$x = \left[\begin{array}{l}\operatorname{arctg} a + 2\pi n\\ \pi + \operatorname{arctg} a + 2\pi n,\end{array}\right. n \in \boldsymbol{Z}.$$

4. Решения уравнения $\operatorname{ctg} x =$ а можно записать совокупностью двух серий решений:

$$x = \left[\begin{array}{l}\operatorname{arcctg} a + 2\pi n\\ \pi + \operatorname{arcctg} a + 2\pi n,\end{array}\right. n \in \boldsymbol{Z}.$$

Арифметический способ отбора корней

Данный способ отбора корней связан с вычислением корней при переборе значений целочисленного параметра или нахождением значений тригонометрических выражений непосредственной подстановкой при проверке корней.

Рассмотрим примеры, в которых используется арифметический способ отбора корней.

Непосредственная подстановка в уравнение и имеющиеся ограничения

В случае непосредственной подстановки серий полученных решений для удаления «посторонних» решений полезным оказывается использование формул приведения. В частности,

$$\sin(x+\pi k)=\begin{cases}\sin x \text{ при } k=2n,\\ -\sin x \text{ при } k=2n+1,\end{cases} n\in \boldsymbol{Z};$$

$$\cos(x+\pi k)=\begin{cases}\cos x \text{ при } k=2n,\\ -\cos x \text{ при } k=2n+1,\end{cases} n\in \boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg} x,\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};$$

$$\operatorname{ctg}(x+\pi k)=\operatorname{ctg} x,\ x\neq\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}+2\sin x=0$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x$.

Это уравнение равносильно системе $\begin{cases}5\cos x-\cos 2x=4\sin^2 x,\\ \sin x\leq 0.\end{cases}$

Решим уравнение системы:

$$5\cos x-(2\cos^2 x-1)=4(1-\cos^2 x)\Leftrightarrow 2\cos^2 x+5\cos x-3=0.$$

Отсюда $\cos x=0,5$ или $\cos x=-3$ (нет корней).

Из уравнения $\cos x=0,5$ получим:

$$x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}, \text{ или } x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Проверим для полученных значений x выполнение условия $\sin x\leq 0$. Для первой серии получаем: $\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0.$

Следовательно, первая серия является «посторонней». Для второй серии получаем: $\sin\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}<0.$

Следовательно, все числа второй серии решений уравнения системы являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

Пример 2. Решить уравнение $|\sin x|+\sqrt{3}\cos x=0$.

Решение. Рассмотрим два множества значений неизвестной x, для которых $\sin x\geq 0$ и $\sin x<0$ соответственно.

1. Пусть $\sin x\geq 0$, тогда данное уравнение принимает вид:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=0\Leftrightarrow \sin x=-\sqrt{3}\cos x.$$

Разделив обе части уравнения на $\cos x$ (так как ясно, что $\cos x\neq 0$), получим: $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$, откуда $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$

Из этой серии решений отберем значения x, для которых $\sin x \geq 0$. Подставляя $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$ в это неравенство, находим:

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ при } k = 2n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

и

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ при } k = 2n + 1,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, корнями исходного уравнения являются числа вида $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. Пусть теперь $\sin x < 0$, тогда данное уравнение принимает вид:

$$-\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0.$$

Аналогично рассуждая, получим: $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Отберем из полученных решений те значения x, для которых $\sin x < 0$. Подставляя $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ в это неравенство, находим:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ при } k = 2m,\ m \in \boldsymbol{Z},$$

и

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi m\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ при } k = 2m + 1,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, корнями исходного уравнения являются числа вида $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Иногда возникает вопрос о совпадении решений в разных сериях. Если специально не ставится задача объединения решений, то учащиеся могут записывать в ответ полученные серии, причем используя для обозначения целочисленных параметров одну букву.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt{1 + \frac{1}{\sin x}} = \operatorname{ctg} x$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg} x \geq 0, \\ 1 + \frac{1}{\sin x} = \operatorname{ctg}^2 x. \end{cases}$$

Решим уравнение системы:

$$1+\frac{1}{\sin x}=\operatorname{ctg}^2 x \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{\sin^2 x}-1 \Leftrightarrow 1+\frac{1}{\sin x}=\left(\frac{1}{\sin x}-1\right)\left(\frac{1}{\sin x}+1\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(2-\frac{1}{\sin x}\right)=0.$$

В области допустимых значений x, которое задается условием $\sin x \neq 0$, последнее уравнение распадается на равносильную ему совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}1+\dfrac{1}{\sin x}=0\\ 2-\dfrac{1}{\sin x}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\\ x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\end{array}\right. \quad n\in \boldsymbol{Z}.$$

Отберем значения x, удовлетворяющие условию $\operatorname{ctg} x \geq 0$.

Для решений первой серии получаем: $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right)=0$, следовательно, условие $\operatorname{ctg} x \geq 0$ выполнено.

Для решений второй серии:

$$\operatorname{ctg}\left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\right)=\operatorname{ctg}\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right)=\begin{cases}\sqrt{3}, \text{если } n \text{ четно},\\ -\sqrt{3}, \text{если } n \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Таким образом, условие $\operatorname{ctg} x \geq 0$ выполнено только для четных значений n, то есть $n = 2m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi m$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Замечание. Обобщением предыдущих подстановок является рассмотрение множества значений целых чисел для параметра при разбиении его на три и более подмножеств.

Пример 4. Найти корни уравнения $\sin 3x = 1$, удовлетворяющие неравенству $\cos x \geq 0$.

Решение. Уравнение $\sin 3x = 1$ имеет корни: $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Так как функции $\sin 3x$ и $\cos x$ имеют общий наименьший положительный период 2π, то для проверки неравенства $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}\right)\geq 0$ достаточно рассмотреть значения 0, 1, 2 для параметра n (пройти весь период). Так как $\cos\frac{\pi}{6}\geq 0$ и $\cos\frac{3\pi}{2}\geq 0$, то получаем корни $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$ и $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$, удовлетворяющие данному условию.

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Методические рекомендации. Приведем несколько схем уравнений, с помощью которых учитель может самостоятельно составлять упражнения подобного типа. Это могут быть уравнения вида

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0,\ \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}=0,\ f(x)\cdot\sqrt{g(x)}=0,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ содержат одну из простейших тригонометрических функций.

Например, $(\operatorname{ctg}\,x+1)\sqrt{\cos x}=0$, $\frac{2\sin x-\sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{tg}\,x}}=0$.

Один из способов повышения сложности заключается в увеличении количества функций, входящих в виде множителей числителя или знаменателя.

Например, $\frac{\cos x\cdot(\sin 2x-1)}{(5\sin x-4)\sqrt{-\operatorname{tg}\,x}}=0$.

Тренировочные упражнения

Решите уравнения:

1. $\frac{\sin 2x+2\sin^2 x}{\sqrt{-\cos x}}=0$.

2. а) $\frac{2-2\sin^2 x-\sqrt{3}\cos x}{\operatorname{ctg}\,x-\sqrt{3}}=0$;

б) $\log_2(-\sin x)+\log_2\cos x=-2$.

3. $|\cos x|=\cos x+2\sin x$.

4. $\sqrt{1+\frac{1}{\cos x}}=\operatorname{tg}\,x$.

Учет области определения или множества значений функций

Иногда при решении уравнений некоторые «посторонние» решения, возникающие в результате замены, могут быть удалены по причине несоответствия их области определения или множеству значений тригонометрических и обратных тригонометрических функций (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Область определения и множество значений тригонометрических функций

Функция	Область определения	Множество значений
$y = \sin x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$
$y = \cos x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$
$y = \operatorname{tg} x$	все $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$	$(-\infty; +\infty)$
$y = \operatorname{ctg} x$	все $x \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$	$(-\infty; +\infty)$
$y = \arcsin x$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$y = \arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$
$y = \operatorname{arctg} x$	$(-\infty; +\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; \pi)$

Пример 5. Решить уравнение $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 0.$

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ 1 - \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x \neq 1. \end{cases}$$

Если $\cos x = 0$, то (из основного тригонометрического тождества) $\sin x = 1$ или $\sin x = -1$. Так как $\sin x \neq 1$, то остается отобрать те значения x, при которых $\sin x = -1$. Отсюда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Пример 6. Решить уравнение $6 \sin x \cos x + \sin 2x \cos \frac{2}{x} = 0.$

Решение. Воспользовавшись формулой синуса двойного аргумента, получим:

$$3 \sin 2x + \sin 2x \cos \frac{2}{x} = 0 \Leftrightarrow \sin 2x \left(3 + \cos \frac{2}{x}\right) = 0.$$

Так как $-1 \le \cos\frac{2}{x} \le 1$ при всех $x \ne 0$, то $3+\cos\frac{2}{x} > 0$. Следовательно, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin 2x = 0, \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z},\ k \ne 0.$$

Ответ: $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \ne 0$.

Пример 7. Решить уравнение $\arccos\frac{3x+4}{1-2x} = \pi x + 6\pi$.

Решение. В соответствии с определением арккосинуса запишем ограничения, которым должна удовлетворять переменная x. Область допустимых значений уравнения определяется условиями $-1 \le \frac{3x+4}{1-2x} \le 1$, а поскольку значения арккосинуса принадлежат отрезку $[0; \pi]$, то необходимо и выполнение условия $0 \le \pi x + 6\pi \le \pi$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} -1 \le \frac{3x+4}{1-2x} \le 1, \\ 0 \le \pi x + 6\pi \le \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+4}{1-2x} \ge -1, \\ \frac{3x+4}{1-2x} \le 1, \\ 0 \le x+6 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+5}{1-2x} \ge 0, \\ \frac{5x+3}{1-2x} \le 0, \\ -6 \le x \le -5 \end{cases} \Leftrightarrow x = -5.$$

Подставляя полученное единственное значение $x = -5$ в исходное уравнение, получим:

$\arccos\frac{3\cdot(-5)+4}{1-2\cdot(-5)} = \pi\cdot(-5)+6\pi$, $\arccos\frac{-11}{11} = \pi$, $\arccos(-1) = \pi$ — верно.

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение $x = -5$.

Ответ: -5.

Замечание. Также необходимо следить за тем, чтобы в ответ не попали «посторонние» решения, возникающие в результате замены, но не принадлежащие области допустимых значений введенной переменной.

Пример 8. Решить уравнение $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.

Решение. Обозначим $\sin x = t$, где $-1 \le t \le 1$. Тогда получим квадратное уравнение $2t^2 - 5t + 2 = 0$, имеющее корни $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = 2$.

Второй корень не удовлетворяет условию $-1 \le t \le 1$. Для уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$ имеем: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $(-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 9. Решить уравнение $\arccos^2 x - 8\arccos x + 15 = 0$.

Решение. Положим $\arccos x = t$. Так как множество значений функции $\arccos x$ — отрезок $[0; \pi]$, найдем решения уравнения $t^2 - 8t + 15 = 0$, удовлетворяющие условию $0 \le t \le \pi$. Такой корень один: $t = 3$. Если $t = 3$, то $\arccos x = 3$, отсюда $x = \cos 3$.

Ответ: $\cos 3$.

Пример 10. Решить уравнение $\sqrt{3 + 2\sin^2 x} = \sqrt{6}\cos 0{,}5x$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \cos 0{,}5x \ge 0, \\ 3 + 2\sin^2 x = 6\cos^2 0{,}5x. \end{cases} \tag{1}$$

Для решения уравнения, входящего в систему (1), воспользуемся формулами $\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ и $\sin^2\dfrac{x}{2} = 1 - \cos^2\dfrac{x}{2}$. Получим:

$$3 + 8\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = 6\cos^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow 3 + 8\left(1 - \cos^2\frac{x}{2}\right)\cos^2\frac{x}{2} = 6\cos^2\frac{x}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^4\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} - 3 = 0.$$

Сделав замену $\cos^2\dfrac{x}{2} = t$, где $0 \le t \le 1$, получим уравнение $8t^2 - 2t - 3 = 0$, имеющее два корня: $t_1 = \dfrac{3}{4}$ и $t_2 = -\dfrac{1}{2}$. Заметим, что корень $t_2 = -\dfrac{1}{2}$ не удовлетворяет условию $0 \le t \le 1$. Возвращаясь к исходной системе, получим:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} \ge 0, \\ \cos^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x}{2} \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\dfrac{x}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

В данном примере при решении уравнения можно было поступить следующим образом:

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1+\cos x}{2}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Однако в этом случае пришлось бы отбирать корни, удовлетворяющие неравенству $\cos 0{,}5x\geq 0$.

Пример 11. Решить уравнение $2(\sin x-\cos x)+\sin 2x=0{,}56$.

Решение. Пусть $\sin x-\cos x=t$, где $-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$, поскольку $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. Тогда $t^2=1-\sin 2x$, и получаем квадратное уравнение относительно t: $2t+1-t^2=0{,}56$, или $t^2-2t-0{,}44=0$.

Отсюда получаем два значения t: $t_1=-0{,}2$ и $t_2=2{,}2$.

Заметим, что t_2 — «посторонний» корень, так как $2{,}2>\sqrt{2}$.

Выполнив обратную замену, получим:

$$\sin x-\cos x=-\frac{1}{5}\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{5}.$$

Отсюда получаем:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{5\sqrt{2}},\ x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Методические рекомендации. Приведем несколько схем уравнений, с помощью которых учитель может самостоятельно составлять упражнения подобного типа.

1. Использовать выражения вида $af^2(x)+bf(x)+c$, где уравнение $at^2+bt+c=0$ имеет один корень, модуль которого больше 1, и второй, модуль которого меньше 1, а $f(x)$ — одна из функций $\sin kx$ или $\cos kx$.

Например, $\frac{6\sin^2 x-5\sin x+1}{\sqrt{-\cos x}}=0$.

2. При составлении уравнения вида $af^2(x)+bf(x)+c=0$, где $f(x)$ — одна из обратных тригонометрических функций, a, b и c — известные числа, можно использовать следующий прием. В выражение $a(f(x)-t_1)(f(x)-t_2)$ подставить конкретные значения t_1 и t_2, одно из которых входит в множество значений функции $f(x)$, а другое — нет.

3. Можно использовать уравнения вида

$$\sqrt{f(x)}=g(x),\ \log_a f(x)=\log_a g(x).$$

Например, $\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x$, $\log_{\sqrt{3}}\left(2\sin^2 x-1\right)=\log_{\sqrt{3}}\sin x$.

Тренировочные упражнения

Решите уравнения:

5. $2\sin^2 x - 5\cos x = 4$.

6. $|\cos^2 0{,}5x - 0{,}6| = 5\cos x + 1$.

7. а) $2\arcsin^2 x - 7\arcsin x + 3 = 0$;

б) $\operatorname{arcctg}^2 x - (\pi + 2)\operatorname{arcctg} x + 2\pi = 0$.

8. а) $\arcsin\dfrac{3x+11}{x+5} = -\pi - \dfrac{\pi x}{2}$;

б) $\operatorname{arctg}(4x^2 - 8x - 9) + \operatorname{arctg} 16x^2 = 0$.

в) $\left(x^2 - 5x + 6\right)\cdot\arcsin\dfrac{x}{2} = 0$.

9. а) $\sqrt{10 + 2\cos^2 x} = \sqrt{14}\sin 0{,}5x$;

б) $\sqrt{\cos 2x + \sin 3x} = \sqrt{2}\cos x$.

10. $\sin x + \cos x = 1 - \sin x\cos x$.

Перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней

Перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней приходится выполнять в случаях, когда требуется отобрать корни, принадлежащие заданному промежутку или удовлетворяющие некоторому условию.

В случае, когда какая-то из серий решений имеет вид $x = x_0 + \dfrac{2\pi k}{m}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, m — заданное натуральное число, и нужно проверить выполнение какого-то дополнительного условия (например, $\cos x \ge 0$), то эту серию удобно разбить на серии с периодом 2π. Получится m серий при $k = 1, 2, \ldots, m$. Соответственно, остается проверить выполнение условий только для одного числа из каждой такой серии.

Пример 12. Решить уравнение $\sin 3x\left(\sqrt{\cos x} - 2\right) = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases}\sin 3x = 0,\\ \cos x \ge 0.\end{cases}$

Так как периоды функций $T(\cos x) = 2\pi$, $T(\sin 3x) = \dfrac{2\pi}{3}$, то их общий наименьший положительный период 2π. Поэтому достаточно рассмотреть решения уравнения на промежутке $[0; 2\pi)$.

Из уравнения $\sin 3x = 0$ получаем: $x = \dfrac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Подставляя поочередно значения 0, 1, 2, 3, 4, 5 для переменной k, найдем корни:

$0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$, содержащиеся на промежутке $[0; 2\pi)$. Среди полученных решений отбираем те, для которых справедливо неравенство $\cos x \geq 0$. Остаются числа $0, \frac{\pi}{3}$ и $\frac{5\pi}{3}$. Следовательно, исходное уравнение имеет корни вида $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pi n, \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 13. Решить уравнение $\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 1$.

Решение. Умножим обе части уравнения на $\cos 3x \neq 0$. Далее получаем:

$$\cos x + \sin 2x = \cos 3x \Leftrightarrow \cos 3x - \cos x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sin 2x \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x\,(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sin x = -0,5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{2} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, \end{array}\right. \quad k, l, m \in \boldsymbol{Z}.$$

Общий наименьший положительный период функций $\sin x$, $\cos 3x$, $\sin 2x$ равен 2π. Поэтому достаточно рассмотреть решения уравнения на промежутке $[0; 2\pi)$.

На промежутке $[0; 2\pi)$ содержатся корни $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

Из условия $\cos 3x \neq 0$ получаем: $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. На промежутке $[0; 2\pi)$ содержатся корни: $x \neq \frac{\pi}{6}$, $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{5\pi}{6}$, $x \neq \frac{7\pi}{6}$, $x \neq \frac{3\pi}{2}$, $x \neq \frac{11\pi}{6}$.

Таким образом, остались числа 0 и π, а значит, исходное уравнение имеет корни $x = \pi t$, $t \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: πt, $t \in \boldsymbol{Z}$.

В случае отбора корней, принадлежащих отрезку $[a; b]$, учащиеся часто просто проверяют, при каких значениях целочисленного параметра корни ему принадлежат. Однако при таком способе необходимо обосновать, что при других значениях целочисленного параметра корни данному промежутку не принадлежат.

Пример 14. Решить уравнение $\cos\sqrt{2-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Рассматривая данное уравнение как простейшее тригонометрическое уравнение, получим: $\sqrt{2-x^2}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Так как $2-x^2\le 2$, то $0\le\sqrt{2-x^2}\le\sqrt{2}$.

Из всех чисел вида $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$, отрезку $\left[0;\ \sqrt{2}\right]$ принадлежит только число $\frac{\pi}{6}$. Поэтому последнее уравнение равносильно уравнению $\sqrt{2-x^2}=\frac{\pi}{6}$. Отсюда $x^2=2-\frac{\pi^2}{36}$, $x=\pm\sqrt{2-\frac{\pi^2}{36}}$.

Ответ: $\pm\sqrt{2-\frac{\pi^2}{36}}$.

Методические рекомендации. При составлении примеров, подобных рассмотренным выше, можно использовать сложные функции $f(kx)$ или $g(mx)$, где k и m — фиксированные целые числа.

Например, $(\sin 2x-1)\sqrt{\cos 3x}=0$, $\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}\,(\operatorname{tg} 2x-1)=0$,

$$\frac{\cos 2x}{\sin 3x}=0.$$

Следующий способ при составлении примеров состоит в использовании уравнений вида $f(x)\sqrt{ax^2+bx+c}=0$.

Например, $(\cos 3x-1)\cdot\sqrt{6+5x-x^2}=0$.

Арифметический способ не требует от учащегося каких-то специальных умений. Требуется лишь уверенное владение таблицей значений тригонометрических функций и формулами приведения. Однако этот способ становится неэффективным в следующих случаях:

- заданные ограничения охватывают большой промежуток, и последовательный перебор значений параметров приводит к громоздким вычислениям;
- серии решений содержат нетабличные значения обратных тригонометрических функций;
- требуется определить количество корней уравнения, удовлетворяющих дополнительным условиям.

Тренировочные упражнения

Решите уравнения:

11. $\dfrac{\cos 2x - 2 + 3\sin x}{1+\sqrt{\cos x}} = 0.$

12. $\dfrac{2\sin^2 x - \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)-1}{\sqrt{\sin x}} = 0.$

13. $\sin 0{,}8x = \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 + x^2 - 3.$

Алгебраический способ отбора корней

Алгебраический способ отбора корней наиболее удобен в тех случаях, когда последовательный перебор значений параметров приводит к вычислительным трудностям, промежуток для отбора корней большой, значения обратных тригонометрических функций, входящих в серии решений, не являются табличными, и при решении задач с дополнительными условиями.

Решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней

Пример 15. Найти все решения уравнения $\sin 2x = \cos x$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. Приведем уравнение к виду $\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$.

Отсюда получаем: $\cos x = 0$ или $\sin x = 0{,}5$.

1. $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Так как решения должны удовлетворять неравенству $-\pi \le \dfrac{\pi}{2} + \pi n \le \dfrac{3\pi}{4}$, то, сократив на π, получим:

$$-1 \le \frac{1}{2} + n \le \frac{3}{4} \text{ или } -\frac{3}{2} \le n \le \frac{1}{4}.$$

С учетом того, что $n \in \boldsymbol{Z}$, получаем два значения: $n = -1$ и $n = 0$. Если $n = 0$, то $x = \dfrac{\pi}{2}$, если $n = -1$, то $x = -\dfrac{\pi}{2}$.

2. $\sin x = 0{,}5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{array}\right.$ $n \in \boldsymbol{Z}$.

Так как должно выполняться условие $-\pi \le x \le \dfrac{3\pi}{4}$, то для первой серии имеем:

$$-\pi \le \frac{\pi}{6} + 2\pi n \le \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -1 \le \frac{1}{6} + 2n \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \le n \le \frac{7}{24} \Leftrightarrow n = 0.$$

Отсюда получаем: $x = \dfrac{\pi}{6}$.

Для второй серии имеем:

$$-\pi \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -1 \le \frac{5}{6} + 2n \le \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{11}{12} \le n \le -\frac{1}{24}.$$

Последнее неравенство не имеет целочисленных решений.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}$.

Пример 16. Найти все решения уравнения $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1$, принадлежащие отрезку $[1; 2]$.

Решение. Воспользуемся формулами понижения степени и преобразования суммы одноименных тригонометрических функций в произведение:

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1 \Leftrightarrow \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 5x \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 5x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi k}{5} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \end{array}\right. \quad k, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Заметим, что первую серию полученной совокупности можно записать в виде $x = \dfrac{\pi(1+2k)}{10}$, а вторую — $x = \dfrac{\pi(1+2n)}{2}$. Отсюда можно заметить, что решения второй серии содержатся в первой, так как их можно записать в виде:

$$x = \frac{\pi(1+2n)}{2} = \frac{\pi(5+10n)}{10} = \frac{\pi\left(1+2(5n+2)\right)}{10}.$$

Поэтому первая серия решений совокупности содержит все корни исходного уравнения. Решим двойное неравенство:

$$1 \le \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} \le 2 \Leftrightarrow 10 \le \pi + 2\pi k \le 20 \Leftrightarrow 10 - \pi \le 2\pi k \le 20 - \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10-\pi}{2\pi} \le k \le \frac{20-\pi}{2\pi} \Leftrightarrow \frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} \le k \le \frac{10}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{5}{\pi}-\frac{1}{2} \geq \frac{5}{3,2}-\frac{1}{2}=\frac{17}{16}$, $\frac{10}{\pi}-\frac{1}{2} \leq \frac{10}{3}-\frac{1}{2}=\frac{17}{6}$ и $k \in \boldsymbol{Z}$, то $k=2$. Тогда $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Пример 17. Решить уравнение $\frac{2\sin^2 x+2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1}{\sqrt{6x-x^2}}=0$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2\sin^2 x+2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0, \\ 6x-x^2>0. \end{cases}$$

Решим уравнение этой системы:

$$2\sin^2 x+2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x+1+\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin 2x=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x-2\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cdot(\sin x-\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \sin x-\cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=0 \\ \operatorname{tg} x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z} \\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Перейдем к решению неравенства:

$$6x-x^2>0 \Leftrightarrow x\cdot(6-x)>0 \Leftrightarrow 0<x<6.$$

Среди решений уравнения отберем те, которые принадлежат интервалу (0; 6).

Рассмотрим первую серию решений:

$$0<\pi n<6,\ n\in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow 0<n<\frac{6}{\pi},\ n\in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow n=1.$$

Следовательно, интервалу (0; 6) принадлежит только $x=\pi$.

Рассмотрим вторую серию решений:

$$0<\frac{\pi}{4}+\pi k<6 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<\frac{6}{\pi}-\frac{1}{4}.$$

Поскольку $\frac{5}{4}=\frac{6}{4}-\frac{1}{4}<\frac{6}{\pi}-\frac{1}{4}<\frac{6}{3}-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$, то условиям $-\frac{1}{4}<k<\frac{6}{\pi}-\frac{1}{4}$, $k\in \boldsymbol{Z}$, удовлетворяют два значения: $k=0$ и $k=1$. Значит, интервалу (0; 6) принадлежат два решения этой серии: $x_1=\frac{\pi}{4}$ и $x_2=\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$, π, $\frac{5\pi}{4}$.

Тренировочные упражнения

14. Решите уравнение $\dfrac{2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 1}{\sqrt{7x - x^2}} = 0.$

15. Найдите сумму корней уравнения $\sin 3x - \cos 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, принадлежащих отрезку $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

16. Укажите все корни уравнения $\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 0$, принадлежащие отрезку [–3; 4].

Исследование уравнения с двумя целочисленными переменными

Этот метод приходится использовать в тех случаях, когда необходимо отобрать общие решения в нескольких сериях решений. Например, при решении уравнения $\sin 2x - \sin 6x = 2$ замечаем, что равенство возможно только в случае

$$\begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 6x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi n}{3}, \end{cases} \quad k, n \in \boldsymbol{Z}.$$

При решении системы тригонометрических уравнений для записи решений нельзя использовать один целочисленный параметр, так как предстоит еще нахождение общего решения.

При нахождении общего решения в двух сериях решений задача сводится к решению в целых числах линейного уравнения с двумя неизвестными:

$$an + bm = c, \tag{2}$$

где $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$ — заданные числа, а $n, m \in \boldsymbol{Z}$ — искомые неизвестные.

Уравнение (2) имеет решение тогда и только тогда, когда c делится на НОД чисел a и b. Так, например, уравнение $2m + 8n = 17$ не имеет решений в целых числах, так как 17 не делится на 2 (наибольший общий делитель чисел 2 и 8).

Покажем, как ищется решение уравнения (2). Рассмотрим уравнение

$$5n - 8m = 4. \tag{3}$$

Выбираем неизвестную, коэффициент при которой меньше по абсолютной величине, — в нашем случае это n. Выражаем ее через другую неизвестную:

$$n = \frac{8m + 4}{5} = m + 1 + \frac{3m - 1}{5}.$$

Целые решения уравнения (3) будут существовать, когда число $\frac{3m-1}{5}$ будет целым.

Обозначим его буквой p, тогда $\frac{3m-1}{5}=p$, или $3m = 5p + 1$.

Проделав с последним уравнением те же действия получим:

$$m=\frac{5p+1}{3}=p+\frac{2p+1}{3}.$$

Для существования целых решений число $\frac{2p+1}{3}$ должно быть целым. Обозначим его буквой t, тогда $\frac{2p+1}{3}=t$, или $2p = 3t - 1$.

Отсюда $p=\frac{3t-1}{2}=t+\frac{t-1}{2}$. Последнее равенство возможно в целых числах, если $t = 2k + 1$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Теперь, чтобы получить решение уравнения (3), нужно выразить p, m и n через k. Выполняя соответствующие подстановки, имеем:

$$p=\frac{3t-1}{2}=\frac{6k+2}{2}=3k+1,$$

$$m=\frac{5p+1}{3}=\frac{15k+6}{3}=5k+2,$$

$$n=\frac{8m+4}{5}=\frac{40m+20}{5}=8k+4.$$

Итак, целыми решениями уравнения (3) являются пары чисел $(n; m)$ вида $n = 8k + 4$, $m = 5k + 2$ при любом $k \in \boldsymbol{Z}$.

Заметим, что представленный метод практически повторяет известный ***алгоритм Евклида*** для нахождения наибольшего общего делителя двух целых чисел.

Применим данный метод к решению рассмотренного выше уравнения, $\sin 2x - \sin 6x = 2$. Приравнивая решения из двух серий и сокращая на π, получим уравнение в целых числах (k, $n \in \boldsymbol{Z}$):

$$\frac{1}{4}+k=-\frac{1}{12}+\frac{n}{3}, \text{ или } 4n - 12k = 4.$$

В этом примере после сокращения на 4 сразу получаем: $n = 3k + 1$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. Это означает, что все решения второй серии содержатся в первой. Следовательно, корни уравнения $\sin 2x - \sin 6x = 2$ задаются формулой $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 18. Решить уравнение $\cos 2x+\sin\frac{5x}{2}=2.$

Решение. Поскольку $-1\le\cos 2x\le 1$ и $-1\le\sin\frac{5x}{2}\le 1$ при всех x, то равенство возможно при одновременном выполнении равенств $\cos 2x=1$ и $\sin\frac{5x}{2}=1$. Получаем систему:

$$\begin{cases}\cos 2x=1,\\ \sin\dfrac{5x}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pi n,\\ x=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{4\pi m}{5},\end{cases}\ n,\,m\in\boldsymbol{Z}.$$

Найдем такие целые значения n и m, при которых решения в полученных сериях совпадают, то есть, приравнивая выражения для x в обеих сериях, получим: $\pi n=\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi m}{5}$, или $5n = 1 + 4m$.

Поступая в соответствии с приведенным выше алгоритмом, получим: $4m = 5n - 1$, или $m=\frac{5n-1}{4}=n+\frac{n-1}{4}$.

Для существования целых решений число $\frac{n-1}{4}$ должно быть целым. Обозначим его буквой k, тогда $\frac{n-1}{4}=k$, или $n = 4k + 1$, где $k\in\boldsymbol{Z}$. Отсюда

$$m=\frac{5n-1}{4}=\frac{20k+4}{4}=5k+1,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Подставляя $n = 4k + 1$, $k\in\boldsymbol{Z}$, в первую серию решений или $m = 5k + 1$, $k\in\boldsymbol{Z}$, во вторую, получим общее решение: $x = \pi(4k + 1)$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pi(4k + 1)$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Пример 19. Решить уравнение $\sin 7x\cos 4x = -1$.

Решение. Используя формулу преобразования произведения в сумму, приводим уравнение к виду $\sin 11x + \sin 3x = -2$, откуда получим: $\sin 11x = -2 - \sin 3x$. Так как при любом значении x $\sin 11x \ge -1$, а $-2 - \sin 3x \le -1$, то равенство $\sin 11x = -2 - \sin 3x$ возможно в том и только в том случае, когда

$$\begin{cases}\sin 11x=-1,\\ -2-\sin 3x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{22}+\dfrac{2\pi n}{11},\ n\in\boldsymbol{Z},\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi m}{3},\ m\in\boldsymbol{Z}.\end{cases}$$

Найдем такие целые значения n и m, при которых решения в полученных сериях совпадают: $-\frac{\pi}{22}+\frac{2\pi n}{11}=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi m}{3}$, то есть $3n=-2+11m$.

Выражая из последнего равенства n, получаем: $n = 3m + \frac{2m-2}{3}$. Так как n — целое, то последнее равенство возможно, только если число $2m - 2$ делится на 3, то есть $2m - 2 = 3k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Отсюда $m = 1 + k + \frac{k}{2}$. Поскольку m должно быть целым, то k должно быть четным. Если $k = 2p$, где $p \in \boldsymbol{Z}$, то $m = 1 + 2p + \frac{2p}{2} = 3p + 1$. Следовательно, $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi(3p+1)}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi p$, $p \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi p$, $p \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 20. Решить уравнение $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 5x$.

Решение. Выполняя равносильные преобразования, получим:

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 5x \Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos 5x}{\sin 5x} \Leftrightarrow \frac{\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x}{\cos 2x \sin 5x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 7x}{\cos 2x \sin 5x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 7x = 0, \\ \cos 2x \neq 0, \\ \sin 5x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, \ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x \neq \frac{\pi m}{5}, \ m \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Выясним, какие из значений $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, являются недопустимыми. Для этого решим в целых числах уравнения

$$\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \qquad (4)$$

и

$$\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7} = \frac{\pi m}{5}. \qquad (5)$$

Рассмотрим уравнение (4). После преобразований получим:

$$2 + 4n = 7 + 14k \Leftrightarrow 4n - 14k = 5.$$

Последнее равенство невозможно, так как левая его часть при всех значениях n и k — четное число, а в правой — число нечетное.

Рассмотрим уравнение (5). После преобразований получим:

$$5 + 10n = 14m \Leftrightarrow 14m - 10n = 5.$$

Последнее равенство невозможно, так как в левой его части стоят четные числа, а в правой — нечетное.

Значит, все значения $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, являются допустимыми.

Ответ: $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Методические рекомендации. При составлении примеров, подобных рассмотренным выше, можно использовать следующие схемы.

1. $f(kx) \pm g(mx) = \pm 2$ или $f(kx) \cdot g(mx) = \pm 1$, где f и g — функции синус или косинус, k и m — фиксированные целые числа.

Например, $\cos 2x - \sin 3x = -2$, $\sin 4x \cos 3x = 1$.

2. $f(kx) = g(mx)$, где f и g — функции тангенс или котангенс.

Тренировочные упражнения

Решите уравнения:

17. $\sin x + \sin 5x = 2$.

18. $\sin 3x \cos 2x = 1$.

19. а) $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 4x$; б) $\operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg} 9x = 1$.

Пример 21. Найти сумму корней уравнения

$$\cos\left(\frac{x+3\pi}{4}\right)\left(\operatorname{ctg}^2\left(\frac{x-2\pi}{4}\right)+4\right)=0,$$

принадлежащих отрезку $[\pi; 80\pi]$.

Решение. Поскольку уравнение $\operatorname{ctg}^2 \dfrac{x-2\pi}{4}+4=0$ не имеет решений, то исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\cos\dfrac{x+3\pi}{4}=0,\\ \sin\dfrac{x-2\pi}{3}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x+3\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\\ \dfrac{x-2\pi}{3}\neq \pi k,\end{cases} n,\ k\in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-\pi+4\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z},\\ x\neq 2\pi+3\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.\end{cases}$$

Значения $x=-\pi+4\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, образуют арифметическую прогрессию с разностью 4π и первым членом 3π. Количество членов этой прогрессии на отрезке $[\pi; 80\pi]$ можно найти из неравенства:

$$\pi \le -\pi + 4\pi n \le 80\pi,\ n\in\boldsymbol{Z} \Leftrightarrow 0{,}5 \le n \le 20{,}25,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Таким образом, n может принимать все натуральные значения от 1 до 20 включительно. Значит, количество членов прогрессии $N=20$.

Найдем сумму S_1 этих двадцати членов: $S_1=\dfrac{2\cdot 3\pi+19\cdot 4\pi}{2}\cdot 20=820\pi$.

Однако среди значений $x=-\pi+4\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, имеются недопустимые. Чтобы выяснить, какие это значения, решим в целых числах уравнение:

$$-\pi+4\pi n=2\pi+3\pi k \Leftrightarrow k=\frac{4n-3}{3} \Leftrightarrow k=n-1+\frac{n}{3}.$$

Поскольку k и n — целые числа, то $n = 3t$, где $t \in \boldsymbol{Z}$. Таким образом, недопустимые значения переменной x получаются при $n = 3t$. Итак, $x \neq -\pi + 12\pi t$, $t \in \boldsymbol{Z}$.

Значения $x = -\pi + 12\pi t$, $t \in \boldsymbol{Z}$, образуют арифметическую прогрессию с разностью 12π и первым членом 11π. Очевидно, что на отрезке $[\pi; 80\pi]$ количество членов этой прогрессии равно 6. Тогда их сумма

$$S_2 = \frac{2\cdot 11\pi + 5\cdot 12\pi}{2}\cdot 6 = 246\pi.$$

Тогда искомая сумма $S = S_1 - S_2 = 574\pi$.

Ответ: 574π.

Тренировочные упражнения

20. Найдите сумму корней уравнения

$$\cos\left(\frac{x+\pi}{4}\right)\left(\operatorname{tg}^2\left(\frac{x-2\pi}{6}\right)+3\right)=0,$$

принадлежащих отрезку $[\pi; 160\pi]$.

Алгебраический способ более эффективен, когда промежуток для отбора корней достаточно большой и применение арифметического способа приводит к сложным и объемным вычислениям, а геометрического — к громоздким построениям.

С другой стороны, в сравнении с ним геометрический способ эффективнее в случае, когда формулы сравниваемых серий решений содержат нетабличные значения обратных тригонометрических функций (например, $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ и т.д.).

Ответы к тренировочным упражнениям

1. $\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** а) $\frac{\pi}{2}+\pi n, -\frac{\pi}{6}+2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{\pi}{12}+2\pi n, -\frac{5\pi}{12}+2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $2\pi n$, $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** $\pi + 2\pi k$, $\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **5.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **6.** $\pm\left(\pi - \arccos\frac{9}{55}\right)+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **7.** а) $\sin\frac{1}{2}$; б) $\operatorname{ctg} 2$. **8.** а) -3; б) $-0{,}5$; $0{,}9$; в) 0; 2. **9.** а) $\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $\frac{4\pi}{3}+4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **10.** $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **11.** $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **12.** $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **13.** $\frac{5\pi}{8}$. **14.** $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}$. **15.** $-\frac{47\pi}{36}$. **16.** $-0{,}75\pi, 0, 0{,}75\pi, \pi$. **17.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k$,

$k \in \boldsymbol{Z}$. **18.** $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **19.** а) $\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{22}+\frac{\pi n}{11}$, $n \neq 11t + 5$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $t \in \boldsymbol{Z}$. **20.** 2159π.

Литература

1. *Гельфанд И.М., Львовский С.М., Тоом А.Л.* Тригонометрия. — М.: МЦНМО, 2003.

2. *Корянов А.Г., Прокофьев А.А.* Математика, ЕГЭ-2011. Задания типа С1. Отбор корней в тригонометрических уравнениях – http://www.alexlarin.net/ege/2011/C12011.pdf

Лекция 2
Геометрический и функционально-графический способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

Для иллюстрации решения простейших тригонометрических уравнений или неравенств в учебниках используются разные модели: тригонометрический круг или графики тригонометрических функций. В первом случае изображение решений связано с числовой окружностью, во втором — с числовой прямой.

Числовая (или координатная) окружность активно применяется в преподавании тригонометрии, с ее помощью легко демонстрировать множества чисел, объединенных по определенным свойствам. Поэтому рассмотрение примеров в данной лекции будет в основном связано с координатной окружностью. Когда использовать числовую окружность затруднительно, для отбора корней тригонометрического уравнения применяют координатную прямую.

Геометрический способ отбора корней предполагает наличие у учащихся навыков изображения решения простейших тригонометрических уравнений и неравенств на числовой окружности или прямой, поэтому необходимо напомнить им основные действия с точками числовой окружности, связанные с формулами решений простейших тригонометрических уравнений.

Геометрическая иллюстрация решения простейших тригонометрических уравнений

Все числа вида $\alpha + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, соответствуют единственной точке числовой окружности P_α, так как при обходе окружности в положительном или отрицательном направлении на целое число оборотов из данной точки P_α мы приходим в эту же точку.

Уравнения вида $\sin x = a$

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $-\alpha + \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, на числовой окружности изображаются точкой P_α или точкой $P_{-\alpha+\pi}$ соответственно. Эти точки расположены на окружности симметрично относительно оси y. Эти два множества чисел можно записать в виде $(-1)^n\alpha + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Причем если n — четное число, то получаем числа $\alpha + 2\pi k$, а если n — нечетное, то числа $-\alpha + \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

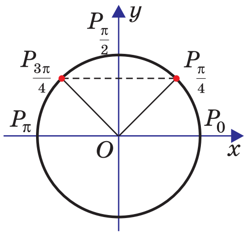

Рис. 2.1

Пример 1. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Запишем решения данного уравнения:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \text{ или } x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Две точки на окружности, $P_{\frac{\pi}{4}}$ и $P_{\frac{3\pi}{4}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно оси ординат (рис. 2.1).

Уравнения вида cos x = a

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $-\alpha + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, на числовой окружности изображаются точками P_α или $P_{-\alpha}$ соответственно. Точки расположены на окружности симметрично относительно оси x. Эти два множества чисел можно записать в виде $\pm\alpha + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 2. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

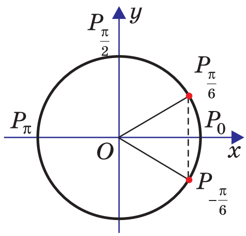

Рис. 2.2

Решение. Запишем решения уравнения:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ или } x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Две точки на окружности, $P_{\frac{\pi}{6}}$ и $P_{-\frac{\pi}{6}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно оси абсцисс (рис. 2.2).

Уравнения вида tg x = a или ctg x = a

Числа вида $\alpha + 2\pi n$ или $\alpha + \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, на числовой окружности изображаются точками P_α или $P_{\alpha+\pi}$. Точки расположены на окружности симметрично относительно начала координат. Эти два множества чисел можно записать в виде $\alpha + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

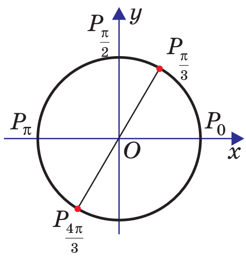

Рис. 2.3

Пример 3. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Решение. Запишем решения уравнения:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n \text{ или } x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Две точки на окружности, $P_{\frac{\pi}{3}}$ и $P_{\frac{4\pi}{3}}$, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно начала координат (рис. 2.3).

Пример 4. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

Решение. Запишем решения данного уравнения:

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ или } x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

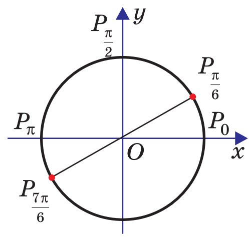

Рис. 2.4

Точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ и $P_{\frac{7\pi}{6}}$ на окружности, изображающие решения этого уравнения, расположены симметрично относительно начала координат (рис. 2.4).

Уравнения вида $T(kx) = a$

Для уравнений вида $T(kx) = a$, где через T обозначена одна из простейших тригонометрических функций, изображение решений уравнения связано с точками — вершинами правильного многоугольника.

Числам вида $\alpha + \frac{2\pi n}{k}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $k \in \{3; 4; 5; \ldots\}$, на числовой окружности соответствуют вершины правильного k-угольника, вписанного в окружность.

При $k = 1$ получаем единственную точку на окружности.

При $k = 2$ — две диаметрально противоположные точки окружности. Эти случаи были рассмотрены выше.

Пример 5. Изобразить на числовой окружности множество решений уравнения $\sin 3x = 1$.

Решение. Решениями данного уравнения являются числа вида $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Придавая последовательно значения 0, 1, 2 переменной n, получим три точки (вершины правильного треугольника) на окружности (рис. 2.5), соответствующие числам $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$.

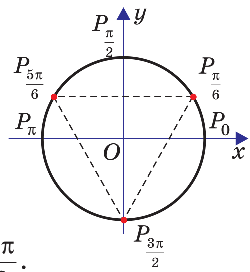

Рис. 2.5

Методические рекомендации. Успех решения учениками тригонометрических уравнений и неравенств зависит от того, как они усвоили различные способы записи чисел, соответствующих точкам единичной окружности. Упражнения на закрепление способов записи чисел должны быть двух видов: в виде прямой задачи — выписать все числа, соответствующие точкам единичной окружности, указанным на рисунке; в виде обратной задачи — изобразить на единичной окружности точки, соответствующие записанным числам.

Упражнения

1. Запишите все числа, соответствующие точкам числовой окружности (рис. 2.6, *а–г*).

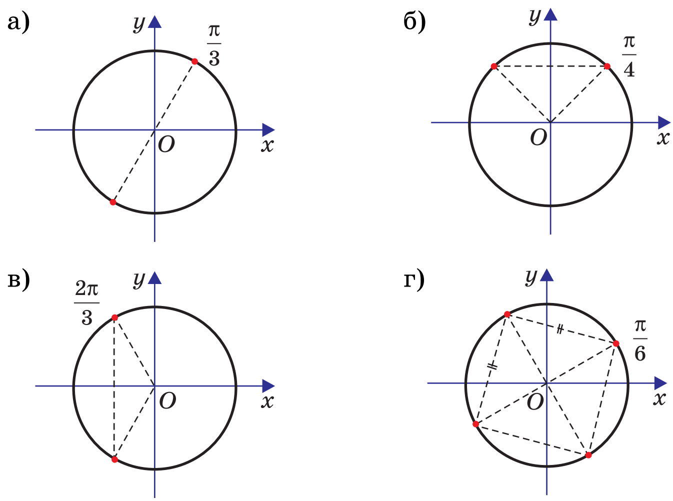

Рис. 2.6

2. Изобразите на числовой окружности точки, соответствующие углам: $30°$, $-30°$, $30° + 180°$, $30° + 360°$, $30° + 90°$, $180° - 30°$, $270° - 30°$, $360° - 30°$, $30° + 720°$, $30° + 360° \cdot n$, $30° + 180° \cdot n$, $30° + 90° \cdot n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. Изобразите точки на числовой окружности, соответствующие числам: $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}+\pi$, $\frac{\pi}{3}+2\pi$, $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}$, $\pi-\frac{\pi}{3}$, $2\pi-\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}+6\pi$, $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

В упражнениях 2 и 3 уместно задать учащимся вопрос о форме записи чисел, соответствующих точкам, расположенным на числовой окружности симметрично относительно: оси абсцисс, оси ординат, начала координат; а также вопрос о том, каким числам соответствует одна точка числовой окружности.

4. Изобразите на числовой окружности точки, соответствующие числам: $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$. Охарактеризуйте расположение точек по отношению к точке $\frac{\pi}{4}$, по отношению к точкам $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π.

5. Изобразите на числовой окружности точки, соответствующие числам $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\pm\frac{7\pi}{6}+2\pi n$, $\pm 2\pi + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

6. Изобразите на числовой окружности точки, соответствующие числам $\frac{\pi}{8}+\frac{2\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}$, где $n \in \boldsymbol{Z}$.

Геометрическая иллюстрация решения простейших тригонометрических неравенств

Основная трудность в отборе решений тригонометрических уравнений ложится на решение тригонометрических неравенств и их изображение на числовой окружности.

Неравенства вида sin $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{a}$ или cos $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{a}$

Напомним алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств вида $\sin x \vee a$ или $\cos x \vee a$, $|a| \le 1$, где символ «$\vee$» заменяет один из знаков неравенств: «>», «<», «$\geq$», «$\leq$».

1. Отмечаем на линии синусов (косинусов) число a и все значения, которые больше (меньше) числа a.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Если выделенная дуга прошла через 0, то для записи граничных точек выбирают разное направление (одно число положительное, другое — отрицательное). Если выделенная дуга не прошла через 0, то для записи граничных точек выбирают одно направление.

4. Записываем общее решение неравенства, добавляя к концам найденного промежутка число, кратное периоду синуса или косинуса.

Сразу отметим, что для отбора решений уравнения нам не потребуется делать аналитическую запись решения тригонометрического неравенства, поэтому последний шаг алгоритма будем опускать.

Пример 6. Изобразить на числовой окружности множество решений неравенства $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. 1. Отмечаем на линии синусов (рис. 2.7) число $\frac{\sqrt{2}}{2}$ и все значения, меньшие этого числа.

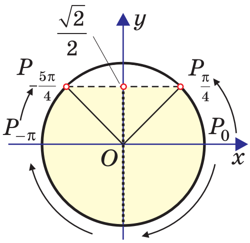

Рис. 2.7

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, ординаты которых меньше $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Выделенная дуга проходит через нуль, поэтому при положительном обходе от нуля получаем первую граничную точку, которая соответствует положительному числу $\frac{\pi}{4}$. Делаем обход по дуге от нуля в отрицательном направлении до второй граничной точки, соответствующей отрицательному числу $-\frac{5\pi}{4}$. Числа из промежутка $\left(-\frac{5\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ являются решениями данного неравенства (см. рис. 2.7). Все решения данного неравенства будут иметь вид $\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 7. Изобразить на числовой окружности множество решений неравенства $\cos x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

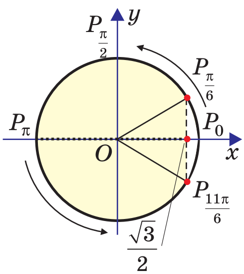

Рис. 2.8

Решение. 1. Отмечаем на линии косинусов (рис. 2.8) число $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и все значения, меньшие этого числа.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, абсциссы которых не больше $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Выделенная дуга не проходит через нуль, поэтому первая точка соответствует положительному числу $\frac{\pi}{6}$. Совершим обход по дуге от точки $P_{\frac{\pi}{6}}$ в положительном направлении до второй точки, соответствующей числу $\frac{11\pi}{6}$. Числа из промежутка $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$ являются решениями данного неравенства (см. рис. 2.8). Все решения данного неравенства будут иметь вид $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Неравенства вида tg $x \vee a$ или ctg $x \vee a$

Для решения неравенств с тангенсом и котангенсом удобно использовать линии тангенсов и котангенсов, касающиеся тригонометрической окружности в точках (1; 0) и (0; 1) соответственно.

Напомним алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств вида $\operatorname{tg} x \vee a$ или $\operatorname{ctg} x \vee a$, где символ «$\vee$» заменяет один из знаков неравенств: «$>$», «$<$», «$\geq$», «$\leq$».

1. Отмечаем на линии тангенсов (котангенсов) число a и все значения, которые больше (меньше) числа a.
2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.
3. Записываем ответ для соответствующего неравенства:

а) для неравенства $\operatorname{tg} x < a$ решение имеет вид

$$-\frac{\pi}{2}+\pi n < t < \operatorname{arctg} a+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

б) для неравенства $\operatorname{tg} x > a$ решение имеет вид

$$\operatorname{arctg} a+\pi n < t < \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

в) для неравенства $\operatorname{ctg} x < a$ решение имеет вид

$$\operatorname{arcctg} a + \pi n < t < \pi + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

г) для неравенства $\operatorname{ctg} x > a$ решение имеет вид

$$\pi n < t < \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Пример 8. Изобразить на числовой окружности множество решений неравенства $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

Решение. 1. Отмечаем на линии тангенсов (рис. 2.9) число $\sqrt{3}$ и все значения, которые больше этого числа.

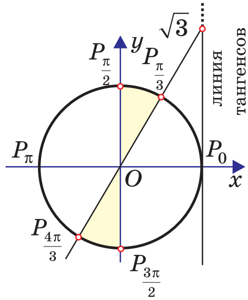

Рис. 2.9

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Выделенная дуга имеет граничную точку, соответствующую числу $\frac{\pi}{3}$. Совершаем обход по дуге от точки $P_{\frac{\pi}{3}}$ в положительном направлении до второй точки, соответствующей числу $\frac{\pi}{2}$. Числа из промежутка $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$ являются решениями данного неравенства. Все решения данного неравенства будут иметь вид $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. На окружности (см. рис. 2.9) выделены два интервала.

Пример 9. Изобразить на числовой окружности множество решений неравенства $\operatorname{ctg} x \le -1$.

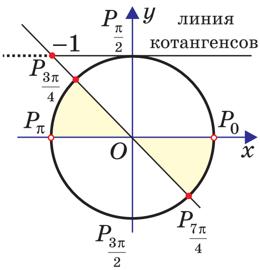

Рис. 2.10

Решение. 1. Отмечаем на линии котангенсов (рис. 2.10) число -1 и все значения котангенса, меньшие этого числа.

2. Выделяем на числовой окружности дугу, на которой находятся точки, удовлетворяющие данному условию.

3. Выделенная дуга имеет граничную точку, соответствующую числу $\frac{3\pi}{4}$. Совершаем обход по дуге от точки $P_{\frac{3\pi}{4}}$ в положительном направлении до второй точки, соответствующей числу π. Числа из промежутка $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$ являются решениями данного неравенства. Остальные решения получают добавлением слагаемого πn, $n \in \boldsymbol{Z}$, к концам полученного промежутка. На окружности (см. рис. 2.10) выделены два промежутка.

Упражнения

7. Изобразите множество решений неравенства, используя числовую окружность:

а) $\sin x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin x < 0$; в) $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin x \ge 0,7$; д) $\cos x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\cos x < 0$;

ж) $\cos x > -\frac{1}{2}$; з) $\operatorname{tg} x > 1$; и) $\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$;

к) $\operatorname{tg} x \le -\sqrt{3}$; л) $\operatorname{tg} x > 0$; м) $\operatorname{ctg} x > -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

н) $\operatorname{ctg} x \ge \sqrt{3}$; о) $\operatorname{ctg} x < 0$.

Отбор корней тригонометрического уравнения на числовой окружности

Тригонометрическую окружность удобно использовать при отборе корней на промежутке, длина которого не превосходит 2π, или в случае, когда значения обратных тригонометрических функций, входящих в серию решений, не являются табличными.

Начнем с рассмотрения примеров, в которых требуется выявить общие корни уравнения или объединить их решения.

Пример 10. Решить уравнение $\cos x \cos 5x = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos 5x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k\\ x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5},\end{array}\right. \quad k, n \in \boldsymbol{Z}.$$

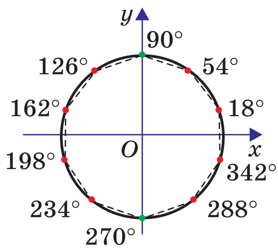

Рис. 2.11

Отметим, что функции $\cos x$ и $\cos 5x$, входящие в уравнение, имеют общий наименьший положительный период 2π. Поэтому отбор корней удобно проводить на числовой окружности, при этом используя градусную меру для записи полученных решений:

$$x = 90° + k \cdot 180° \text{ или } x = 18° + n \cdot 36°.$$

Из рисунка 2.11 видим, что вторая серия решений включает в себя первую серию.

Ответ: $\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Следующие примеры связаны с отбором корней уравнения, удовлетворяющих дополнительным условиям.

Пример 11. Определить количество корней уравнения $\operatorname{ctg} 3x \sin 6x - \cos 6x - \cos 12x = 0$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Решение. Умножая обе части уравнения на $\sin 3x \neq 0$, получаем: $\sin 3x - \sin 3x \cos 12x = 0$, $\sin 3x\,(1 - \cos 12x) = 0$.

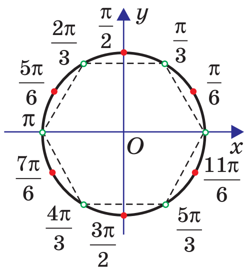

Рис. 2.12

Отсюда имеем: $\begin{cases}\cos 12x = 1,\\ \sin 3x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \dfrac{\pi n}{6},\\ x \neq \dfrac{\pi k}{3},\end{cases}$ $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

Функции $\cos 12x$ и $\sin 3x$, входящие в уравнение, имеют основной период, не превосходящий 2π, поэтому проведем отбор корней, используя тригонометрическую окружность. Для этого полученные значения в серии решений и серии ограничений изобразим на тригонометрической окружности (рис. 2.12) и в ответ запишем количество точек серии решений, не совпавших с точками серии ограничений.

Ответ: 6.

Пример 12. Найти все корни уравнения $(2\sin x + 1)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x > 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x = -\dfrac{1}{2}\\ \sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n\\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\end{array}\right.\end{array}\right. \quad n, k \in \boldsymbol{Z}.$$

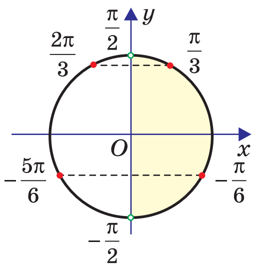

Рис. 2.13

Изобразим полученные решения на тригонометрической окружности (рис. 2.13). Каждому уравнению соответствуют две точки тригонометрической окружности. В ответ запишем точки, лежащие на дуге окружности, соответствующей неравенству $\cos x > 0$, то есть лежащие в I и IV четвертях.

Ответ: $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Перейдем к рассмотрению примеров, содержащих естественные ограничения, связанные с областью определений или областью значений функций, входящих в уравнение.

Пример 13. Решить уравнение $\log_2(-\sin x) + \log_2 \cos x = -2$.
Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} -\sin x > 0, \\ \cos x > 0, \\ \log_2(-\sin x\ \cos x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x > 0, \\ -\sin x\ \cos x = 0{,}25. \end{cases}$$

Решим уравнение этой системы:

$$-\sin x \cos x = 0{,}25 \Leftrightarrow \sin 2x = -0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z} \\ 2x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z} \\ x = -\dfrac{5\pi}{12} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array} \right.$$

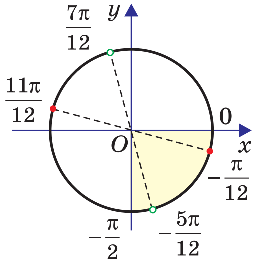

Рис. 2.14

Функции $\sin x$, $\cos x$ и $\sin 2x$, входящие в уравнение, имеют общий наименьший положительный период 2π. Для отбора корней используем тригонометрический круг (рис. 2.14).

Условиям $\sin x < 0$ и $\cos x > 0$ удовлетворяют координаты точек, лежащих в IV координатной четверти.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{12} + 2\pi n,\ -\dfrac{5\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 14. Решить уравнение $|\cos x| = \sqrt{3}\sin x$.
Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \pm\cos x = \sqrt{3}\sin x, \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \\ \sin x \geq 0, \end{cases} n \in \boldsymbol{Z}.$$

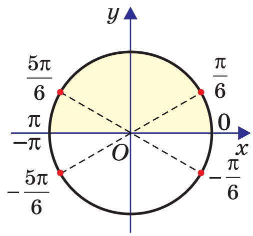

Рис. 2.15

Так как функции $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ имеют общий наименьший положительный период 2π, то отбор корней проведем на тригонометрическом круге (рис. 2.15).

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 15. Решить уравнение $\dfrac{(2\cos x+1)\log_{31} 3\mathrm{tg}^2 x}{\log_{13} 2\sin x}=0.$

Решение. Данная дробь равна нулю, если cos x = –0,5 или

$\mathrm{tg}\ x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, при условии, что $\begin{cases}\mathrm{tg}\ x\neq 0,\\ \sin x>0,\\ \sin x\neq 0,5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\\ \sin x>0,\\ \sin x\neq 0,5.\end{cases}$

Решая первые два уравнения, получаем:

$$\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n\\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\end{array}\right. \quad n,k\in \boldsymbol{Z}: \begin{cases}x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\\ \sin x>0, \\ x\neq(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi m,\end{cases} \quad n,m\in \boldsymbol{Z}.$$

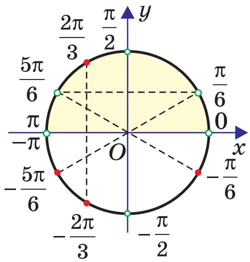

Рис. 2.16

Тригонометрические функции, входящие в данное уравнение, имеют общий наименьший положительный период 2π. Изобразим множество решений и ограничения на числовой окружности, выделив промежуток [–π; π) (рис. 2.16).

Используя рисунок, получаем ответ.

Ответ: $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

Пример 16. (*ЕГЭ-2010, C1*.) Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{49}\right)^{\mathrm{tg}\ x}-14\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\mathrm{tg}\ x}+49=0,\\ 3\sqrt{y}\,\mathrm{tg}\ x-5\sqrt{2}\cos x=0.\end{cases}$$

Решение. Заметим, что левая часть первого уравнения системы представляет полный квадрат:

$$\left(\dfrac{1}{49}\right)^{\mathrm{tg}\ x}-14\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\mathrm{tg}\ x}+49=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{2\mathrm{tg}\ x}-14\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\mathrm{tg}\ x}+49=\left(\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\mathrm{tg}\ x}-7\right)^2.$$

Равенство нулю возможно, если $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{\mathrm{tg}\ x}-7=0$, то есть $7^{-\mathrm{tg}\,x}=7$.

Отсюда tg x = –1 и $x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

Рассмотрим второе уравнение системы. Учитывая, что $\operatorname{tg} x = -1$, запишем его в виде $3\sqrt{y} = -5\sqrt{2}\cos x$.

Так как правая часть этого уравнения должна быть неотрицательна, то $\cos x < 0$ (рис. 2.17). Из множества решений $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$, выбираем точки, лежащие во второй четверти, то есть $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \boldsymbol{Z}$. В этом случае

$$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } 3\sqrt{y} = -5\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5.$$

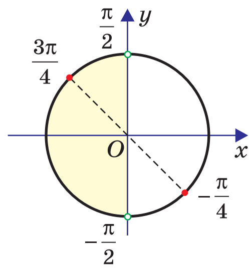

Рис. 2.17

Отсюда $y = \frac{25}{9}$.

Ответ: $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{25}{9}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

О способах создания учителем набора уравнений различных типов, о включении ученика в процесс конструирования целой системы упражнений по заданиям С1 хорошо описано в статье Г. Ковалевой «Не клонировать, а конструировать» («Математика», 2011, № 5).

Тренировочные упражнения

1. Найдите все корни уравнения $\left(\sqrt{2}\sin x + 1\right)(2\sin x - 3) = 0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x < 0$.

2. Найдите все корни уравнения $\sqrt{2}\sin^2 x = \sin x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x < 0$.

Решите уравнение (3–16).

3. $\frac{2\sin x - \sqrt{3}}{2\cos x + 1} = 0.$

4. $\frac{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2\cos x - 1} = 0.$

5. $\frac{6\sin^2 x - 5\sin x + 1}{\sqrt{-\cos x}} = 0.$

6. $\frac{9^{\sin x} - 3}{\sqrt{-2\cos x}} = 0.$

7. $(\cos 3x - 1)\sqrt{6 + 5x - x^2} = 0.$

8. $\sin 0{,}8x = \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 + x^2 - 3.$

9. $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x.$

10. $\left(2\cos^2 x - 9\cos x + 4\right)\sqrt{-2\operatorname{tg} x} = 0.$

11. $\sqrt{\cos 2x} = -\sqrt{2}\sin x.$

12. $\log_{\cos x} \sin x = 1.$

13. $\log_{\sqrt{5}} \cos x = \log_{\sqrt{5}}\left(1 - 2\cos^2 x\right).$

14. $(2\cos^2 x - 7\cos x + 3)\log_{41}(-\sin x) = 0.$

15. $|\cos x| - \cos x = 2\sin x.$

16. $\sqrt{(x+1)^2 + 16} = 4 - \sin^2 \pi x.$

Прием «укрупнения» значений корней

В случае маленьких значений корней можно воспользоваться приемом «укрупнения» этих значений.

Пример 17. Решить уравнение $\cos 12x - \sin 4x = 0$.

Решение. Основной период функции $\cos 12x$ равен $\frac{\pi}{6}$, функции $\sin 4x$ — равен $\frac{\pi}{2}$. Так как общий период этих функций равен $\frac{\pi}{2}$, то при умножении на 4 период станет 2π.

Преобразуем данное уравнение:

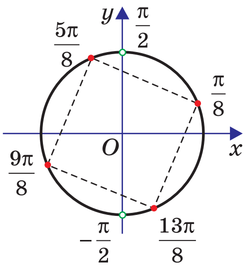

Рис. 2.18

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-12x\right)-\sin 4x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-8x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(8x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{32}+\frac{\pi k}{8}\\ x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}\\ 4x=\frac{3\pi}{2}+\pi n,\end{array}\right. \quad k, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Отметим на окружности полученные значения. Легко увидеть, что эти значения не совпадают (рис. 2.18).

Ответ: $\frac{\pi}{32}+\frac{\pi n}{8}, \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n \in \boldsymbol{Z}$.

Методические рекомендации. При составлении примеров, подобных рассмотренному выше, можно использовать схему $f(kx) = g(mx)$, где k и m — фиксированные натуральные числа, а f или g обозначают синус или косинус. Например, $\cos 15x = \cos 6x$, $\cos 15x = \sin 4x$.

Можно усложнить задачу и взять уравнения вида $\frac{f(kx)}{g(mx)}=0$, $\frac{f(kx)}{\sqrt{g(mx)}}=0$, $f(kx)\sqrt{g(mx)}=0$.

Тренировочные упражнения

Решите уравнения:

17. $\cos 15x = \sin 5x$. **18.** $\sin x \sin 5x = \cos 4x$.

Отбор корней тригонометрического уравнения на числовой прямой

Тригонометрическую окружность удобно использовать для изображения точек вида $\alpha + \beta n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, где отношение $2\pi : \beta$ — натуральное число. Например, множеству чисел $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, на окружности соответствуют $2\pi : \frac{\pi}{3}=6$ точек. С другой стороны, числа вида $\frac{1}{4}+3n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, целесообразнее отмечать на координатной прямой, так как число 2π не соизмеримо с числом 3, и на окружности будет бесконечное множество точек. Еще одна причина выбора числовой прямой связана с периодами функций, превосходящих 2π. Например, числа $\frac{\pi}{4}+4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, будут изображаться точкой $P_{\frac{\pi}{4}}$, но число, например $\frac{\pi}{4}+2\pi$, которому также соответствует точка $P_{\frac{\pi}{4}}$, не входит в рассматриваемое множество чисел.

Пример 18. Решить уравнение $\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}}=0.$

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\cos\dfrac{x}{2}=0,\\ \sin\dfrac{x}{3}\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pi+2\pi k,\\ x\neq 3\pi n,\end{cases} k,\, n \in \boldsymbol{Z}$$

Основной период функций, входящих в уравнение: $T\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)=4\pi$, $T\left(\sin\dfrac{x}{3}\right)=6\pi$. Их общий наименьший положительный период равен 12π.

На числовой прямой (рис. 2.19) рассмотрим промежуток $(-\pi; 11\pi]$. Отметим точками числа $-\pi$, π, 3π, 5π, 7π, 9π, 11π, соответствующие формуле $x = \pi + 2\pi k$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Крестиками отметим точки 0, 3π, 6π, 9π, соответствующие формуле $x \neq 3\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Числа, не отмеченные крестиками, лучше разбить на два множества с разностью 6π и записать общий ответ.

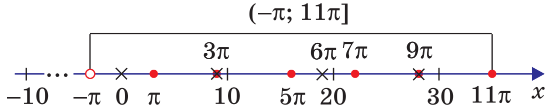

Рис. 2.19

Ответ: $\pi + 6\pi n$, $5\pi + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Замечание. Исходя из формул системы $\begin{cases} x = \pi + 2\pi k, \\ x \neq 3\pi n, \end{cases}$ $k, n \in \boldsymbol{Z}$, достаточно было рассмотреть на числовой прямой промежуток $(-\pi; 5\pi]$.

Пример 19. Определить количество корней уравнения $\dfrac{2\sin \pi x - \sqrt{3}}{2\cos \pi x + 1} = 0$ на промежутке $[-3; 5]$.

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin \pi x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos \pi x \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} + 2k \\ x = \dfrac{2}{3} + 2k, \end{array} \right. \\ x \neq \pm \dfrac{2}{3} + 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} + 2k, \\ x \neq \pm \dfrac{2}{3} + 2n, \end{cases} \quad k, n \in \boldsymbol{Z}.$$

Изобразим полученные значения решений (точки) и ограничений (крестики) на координатной прямой в промежутке $[-3; 5]$. В ответ запишем количество точек решений, не совпавших с крестиками (рис. 2.20).

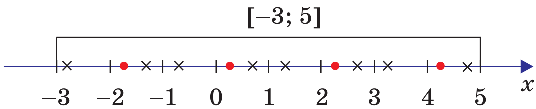

Рис. 2.20

Ответ: 4.

Методические рекомендации. Для составления задач, подобных примеру 18, можно воспользоваться шаблоном уравнения вида $\dfrac{T_1\left(\dfrac{x}{m}\right)}{T_2\left(\dfrac{x}{n}\right)} = 0$, где T_1 и T_2 — одна из простейших тригонометрических функций, $m, n \in \boldsymbol{N}$.

Задачи по образцу примера 19 легко получить из готовых примеров. Например, уравнение $\dfrac{\cos 2x - \sin x - 1}{2\cos x - \sqrt{3}} = 0$ является основой для уравнения $\dfrac{\cos 2\pi x - \sin \pi x - 1}{2\cos \pi x - \sqrt{3}} = 0$. Формулы решения уравнения содержат слагаемое 2π, то есть последовательные решения отличаются на две единицы, поэтому для отбора корней достаточно взять промежуток, длина которого равна 2.

Тренировочные упражнения

19. Укажите наименьший корень уравнения $\cos 2x + 2 = 3\cos x$, принадлежащий отрезку $[-2{,}5\pi; -0{,}5\pi]$.

Функционально-графический способ отбора корней уравнения

При решении простейших тригонометрических неравенств иногда используют графики тригонометрических функций. При этом подходе требуется умение схематичного построения графика тригонометрической функции и применение формул корней соответствующих уравнений.

Пример 20. Решить неравенство: а) $\sin x < \frac{1}{2}$; б) $\sin x > \frac{1}{2}$.

Решение. Схематично изобразим графики функций $y = \sin x$ и $y = 0{,}5$ (рис. 2.21). Для уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ запишем общее решение: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Найдем три корня этого уравнения, последовательно придавая переменной n значения -1, 0 и 1: $-\frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$. Полученные значения являются абсциссами трех последовательных точек пересечения построенных графиков. Неравенство $\sin x < \frac{1}{2}$ (график функции $y = \sin x$ расположен ниже прямой $y = 0{,}5$) выполняется на промежутке $\left(-\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$, а неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$ (график функции $y = \sin x$ расположен выше прямой $y = 0{,}5$) выполняется на промежутке $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ (см. рис. 2.21).

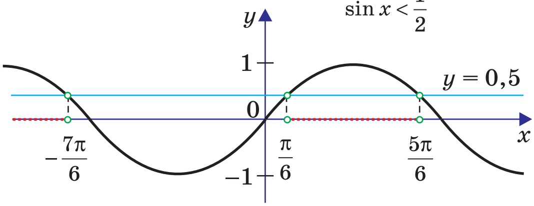

Рис. 2.21

Добавляя периоды синуса к концам этих интервалов, получаем окончательное решение.

Ответ: а) $-\frac{7\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Пример 21. Решить неравенство: а) $\cos x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\cos x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Схематично изобразим графики функций $y = \cos x$ и $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 2.22). Для уравнения $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ запишем общее решение: $x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. При $n=0$ найдем два корня этого уравнения: $\pm\frac{3\pi}{4}$; при $n = 1$ выберем один корень $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi=\frac{5\pi}{4}$. Полученные значения являются абсциссами трех последовательных точек пересечения построенных графиков.

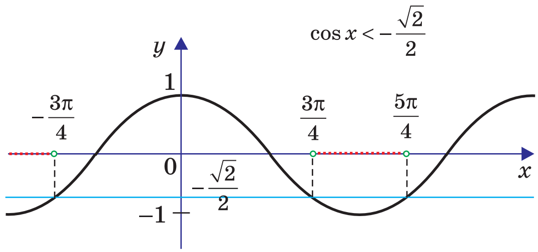

Рис. 2.22

Неравенство $\cos x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ выполняется на промежутке $\left(\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right)$, а неравенство $\cos x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$ выполняется на промежутке $\left(-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$. Добавляя период косинуса к концам этих интервалов, получаем окончательное решение.

Ответ: а) $\frac{3\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in \boldsymbol{Z}$.

Пример 22. Решить уравнение $\frac{2\cos x-\sqrt{2}}{\sqrt{2\sin x-1}}=0$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x > \dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\\ \sin x > \dfrac{1}{2},\end{cases} k \in \boldsymbol{Z}.$$

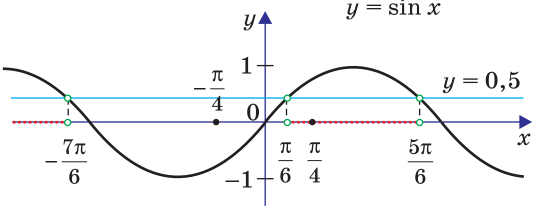

Рис. 2.23

Из рисунка 2.23 видно, что на промежутке $\left[-\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right]$, длина которого 2π, неравенству $\sin x > \dfrac{1}{2}$ удовлетворяет одно число $\dfrac{\pi}{4}$. Следовательно, все числа вида $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 23. Решить уравнение $\dfrac{2\sin x - \sqrt{3}}{\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}} = 0$.

Решение. Из условия получаем:

$$\begin{cases}\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \operatorname{tg} x > 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^k \dfrac{\pi}{3} + \pi k,\\ \operatorname{tg} x > 1,\end{cases} k \in \boldsymbol{Z}.$$

На промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, длина которого 2π, неравенству $\operatorname{tg} x > 1$ удовлетворяет одно число $\dfrac{\pi}{3}$ (рис. 2.24). Следовательно, все числа вида $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, удовлетворяют данному уравнению.

Ответ: $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

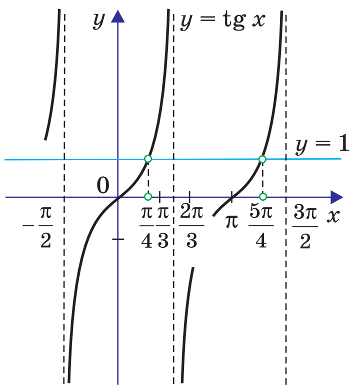

Рис. 2.24

Методические рекомендации. С помощью графиков удобно иллюстрировать решения простейших тригонометрических уравнений и неравенств. Поэтому одной из схем составления заданий являются уравнения вида $\frac{T_1 \cdot T_2}{\sqrt[2n]{T_3}} = 0$, $T_1 \cdot \sqrt[2n]{T_2} = 0$, $\frac{T_1 \cdot T_2}{\log_a T_3} = 0$, $T_1 \cdot \log_a T_2 = 0$, где T_1, T_2 и T_3 — одна из простейших тригонометрических функций, $n \in \boldsymbol{N}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Тренировочные упражнения

Решите уравнения:

20. $\frac{2\sin^2 x - \sin x}{\sqrt{-\cos x}} = 0$.

21. $(6\sin^2 x - \sin x - 1)\log_2 \cos x = 0$.

22. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \frac{16\sin^4 x - 9}{\sqrt{\cos x}} = 0, \\ \sqrt{y+6} + 2\sin x = 0. \end{cases}$

Ответы к тренировочным упражнениям

1. $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $\pi + 2\pi n$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** πk, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **5.** $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $\pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **6.** $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **7.** -1, 6, 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$. **8.** $\frac{5\pi}{8}$. **9.** $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **10.** πn, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **11.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **12.** $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **13.** $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **14.** $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **15.** $2\pi n$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **16.** -1. **17.** $\frac{\pi}{40} - \frac{\pi n}{10}$, $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **18.** $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **19.** $-\frac{7\pi}{3}$. **20.** $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $\pi + 2\pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. **21.** $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $-\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n$, $2\pi m$, $k, n, m \in \boldsymbol{Z}$. **22.** $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; -3\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Литература

1. ЕГЭ-2011. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М.: Национальное образование, 2010.

2. *Мордкович А.Г.* Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень). — 10-е изд., стер. — М.: Мнемозина, 2009.

3. *Шестаков С.А., Захаров П.И.* ЕГЭ 2011. Математика. Задача С1 / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2011.

4. *Шабунин М.И., Прокофьев А.А., Олейник Т.А., Соколова Т.В.* Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: методическое пособие для 11 класса. — М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2010.

Лекция 3

Решение неравенств алгебраическими методами

Задание С3 контрольно-измерительных материалов — это задание повышенного уровня сложности, представляющее неравенство, содержащее рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические или модульные выражения. При решении этих неравенств учащиеся должны показать знания теорем о равносильности неравенств определенного вида, умения использовать стандартные и нестандартные методы решения.

Максимальное число баллов за решение этого типа заданий на экзамене в 2010 г. получили лишь 1,5% приступивших к его решению. Наряду с представленным разнообразием методов решения неравенств имело место и многообразие ошибок, допущенных учащимися.

При подготовке по данной теме особое внимание следует уделить применению метода интервалов и использованию свойств функций.

Мы сделали подборку заданий исходя из материалов ЕГЭ последних двух лет и доступных нам пробных и тренировочных вариантов.

Для удобства материал лекций разбит на разделы, что позволит учителю сформировать у учащихся целостное представление о методах решения неравенств и дать им возможность переосмыслить их с единой точки зрения.

Напомним, что полное правильное решение задания С3 с развернутым ответом оценивается 3 баллами. При решении задачи допустимы любые математические методы — алгебраический, функциональный, графический, геометрический и т.д.

При алгебраическом подходе выполняют равносильные преобразования неравенств, в частности, тождественные преобразования отдельных выражений, входящих в неравенство.

При функциональном подходе используют свойства функций (монотонность, ограниченность и т.д.). В некоторых случаях алгебраический и функциональный подходы взаимно заменяемы. Например, утверждение

> Если обе части неравенства $g(x) > h(x)$ возвести в одну и ту же нечетную степень, то получим неравенство $g^{2n+1}(x) > h^{2n+1}(x)$, равносильное данному

можно заменить другим утверждением:

По свойству строго возрастающей функции $y = t^{2n+1}$, $n \in \boldsymbol{N}$, на $\boldsymbol{R}$ неравенства $g(x) > h(x)$ и $g^{2n+1}(x) > h^{2n+1}(x)$ равносильны.

При решении неравенств используют преобразования (возведение в четную или нечетную степень, логарифмирование, потенцирование), позволяющие привести неравенство к более простому виду. В процессе преобразований исходного неравенства получаем неравенство, множество решений которого либо такое же, либо шире (можно получить посторонние решения), либо уже (можно потерять решения). Поэтому важно знать, какие преобразования неравенства являются равносильными, какие преобразования выражений являются тождественными и при каких условиях.

Сведение неравенства к равносильной системе или совокупности систем

Как правило, равносильные преобразования выполняются для упрощения исходного неравенства и, в частности, для освобождения неравенства от знаков корня, модуля, логарифма и от степеней.

Ниже будут приведены схемы решения некоторых стандартных неравенств определенного вида. При этом отметим, что на практике некоторые цепочки преобразований делают короче, пропуская очевидные преобразования. Например, вместо длинной цепочки преобразований:

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)},\ n \in \boldsymbol{N} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt[2n]{f(x)}\right)^{2n} > \left(\sqrt[2n]{g(x)}\right)^{2n}, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$$

можно использовать краткую схему решения:

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)},\ n \in \boldsymbol{N} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geq 0, \end{cases}$$

Расщепление неравенств

Одним из стандартных видов преобразования неравенства является приведение его к неравенству, в котором левая часть представляет собой произведение (частное) двух выражений, а правая — равна нулю. После такого преобразования применяют правило расщепления неравенств, опирающееся на правило знаков при умножении (делении) положительных или отрицательных чисел.

При применении правила расщепления необходимо выписать совокупность систем неравенств в соответствии с логическим перебором случаев, а затем решить каждую из этих систем и объединить в ответе полученные множества решений:

- $f(x)\cdot g(x)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\le 0,\\ g(x)\le 0;\end{cases}\end{array}\right.$
- $f(x)\cdot g(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)\le 0\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\le 0,\\ g(x)\ge 0;\end{cases}\end{array}\right.$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)> 0\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\le 0,\\ g(x)< 0;\end{cases}\end{array}\right.$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\ge 0,\\ g(x)< 0\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\le 0,\\ g(x)> 0.\end{cases}\end{array}\right.$

Аналогичные схемы расщепления записывают для строгих неравенств.

Покажем применение правила расщепления при решении неравенств, содержащих рациональные выражения.

Неравенства, содержащие рациональные выражения

Пример 1. Решить неравенство $\dfrac{x+5}{x-3}\le 0.$

Решение. Частное двух выражений отрицательно тогда и только тогда, когда выражения, стоящие в числителе и знаменателе, имеют разные знаки. Отсюда получаем совокупность двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+5\ge 0,\\ x-3<0\end{cases}\\ \begin{cases}x+5\le 0,\\ x-3>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -5,\\ x<3\end{cases}\\ \begin{cases}x\le -5,\\ x>3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решения первой системы неравенств образуют промежуток $[-5; 3)$, а вторая система не имеет решений. Объединяя полученные множества решений, получаем промежуток $[-5; 3)$.

Ответ: $[-5; 3)$.

Метод интервалов

В процессе решения может оказаться, что в левой части неравенства количество сомножителей довольно велико, а значит, непосредственное применение правил расщепления приводит к трудоемкому решению. В этом случае оказывается эффективным применение метода интервалов.

В основе метода интервалов лежат следующие положения:

1. Знак произведения (частного) однозначно определяется знаками сомножителей (делимого и делителя).

2. Знак произведения не изменится (изменится на противоположный), если изменить знак у четного (нечетного) числа сомножителей.

3. Знак многочлена справа от большего (или единственного) корня совпадает со знаком его старшего коэффициента. В случае отсутствия корней знак многочлена совпадает со знаком его старшего коэффициента на всей области определения.

Сформулируем свойство чередования знака линейного двучлена $ax+b$ $(a\ne 0)$:

При переходе через значение $x_0=-\dfrac{b}{a}$ знак выражения $ax+b$ меняется на противоположный.

Знание свойства чередования знака линейного двучлена $ax+b$ позволяет не приводить линейные двучлены к каноническому виду $x-x_0$.

Свойство двучлена $ax+b$ лежит в основе метода интервалов и часто используется при решении алгебраических неравенств более высоких степеней.

Рассмотрим выражение

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot \ldots \cdot f_n(x), \tag{1}$$

где $f_i(x)=a_ix+b_i$, причем все выражения попарно различны. Выражению (1) соответствует разбиение числовой прямой на интервалы точками $x_i = -\frac{b_i}{a_i}$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$). Метод интервалов опирается на следующее свойство чередования знака выражения (1):

При переходе через точку $x_i = -\frac{b_i}{a_i}$ из одного интервала в смежный с ним интервал знак значения выражения (1) меняется на противоположный.

Действительно, при переходе через точку $x = -\frac{b_i}{a_i}$ в выражении (1) меняет знак только один множитель: $a_i x + b_i$.

Аналогично можно провести рассуждения для выражения $\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — выражения вида (1).

Пример 2. Решить неравенство $\left(2x^2 - 5x + 3\right)\left(\sqrt[3]{3} - x\right) < 0$.

Решение. Перепишем неравенство в следующем виде:

$$(2x-3)(x-1)\left(\sqrt[3]{3} - x\right) < 0,$$

и далее используем метод интервалов.

1. Обозначим $f(x) = (2x-3)(x-1)\left(\sqrt[3]{3} - x\right)$.

2. $D(f) = \boldsymbol{R}$.

3. $f(x) = 0$, $(2x-3)(x-1)\left(\sqrt[3]{3} - x\right) = 0$. Отсюда получаем корни уравнения: 1; 1,5; $\sqrt[3]{3}$. Так как $1 < 3 < 1{,}5^3 = 3{,}375$, то $1 < \sqrt[3]{3} < 1{,}5$.

4. Так как $f(0) > 0$, то расставляем знаки в соответствии с правилом знакочередования, как показано на рисунке 3.1.

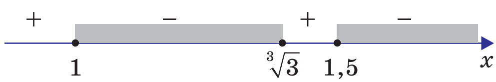

Рис. 3.1

Получаем все значения $x \in \left(1;\ \sqrt[3]{3}\right) \cup (1{,}5;\ +\infty)$, при которых $f(x) < 0$.

Ответ: $\left(1;\ \sqrt[3]{3}\right) \cup (1{,}5;\ +\infty)$.

Заметим, что при решении неравенств $f(x) \vee 0$ или $\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0$ методом интервалов, где символ «$\vee$» заменяет один из знаков неравенств: «>», «<», «$\geq$», «$\leq$», можно обойтись без промежуточных вычислений, если выражение $f(x)$ или $\frac{P(x)}{Q(x)}$ содержит все линейные двучлены с положительными старшими коэффициентами или записано в каноническом виде:

$$(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$$

или

$$\frac{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x-a_n)}{(x-b_1)\cdot(x-b_2)\cdot\ \ldots\ \cdot(x-b_m)}.$$

В этом случае на самом правом промежутке двучлены положительны, а значит, выражение $f(x)$ или $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ положительно. Далее на промежутках расставляют знаки в соответствии с правилом знакочередования.

Пример 3. Решить неравенство $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3}>-3.$

Решение. Приведем неравенство к виду $\dfrac{(x-1,5)(x-2)}{(x-1)(x-3)}>0$ и используем метод интервалов.

1. Пусть $f(x)=\dfrac{(x-1,5)(x-2)}{(x-1)(x-3)}.$

2. $D(f) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

3. Из уравнения $f(x) = 0$, или $(x-1,5)(x-2) = 0$, найдем корни: 1,5 и 2, которые принадлежат $D(f)$.

4. Так как в записи выражения $f(x)$ все двучлены записаны в каноническом виде, то на промежутке $(3;\ +\infty)$ выражение $f(x)$ положительно. На остальных промежутках расставляем знаки по правилу знакочередования (рис. 3.2).

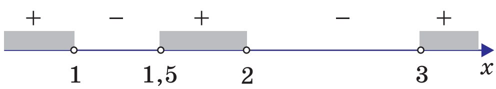

Рис. 3.2

Следовательно, $f(x) > 0$ при всех значениях $x \in (-\infty;\ 1) \cup (1,5;\ 2) \cup$ $\cup\ (3;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ 1) \cup (1,5;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$.

Первое обобщение метода интервалов

Пусть дано выражение вида

$$f(x)=f_1^{k_1}(x)\cdot f_2^{k_2}(x)\cdot\ \ldots\ \cdot f_n^{k_n}(x), \qquad (2)$$

где $f_i(x) = a_ix + b_i$, причем все выражения $a_ix + b_i$ попарно различны, а $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — фиксированные натуральные числа.

Для решения неравенства $f(x) \vee 0$, где выражение $f(x)$ имеет вид (2), используется *обобщенный метод интервалов,* который опирается на следующее правило чередования знака выражения:

При переходе через точку $x_i = -\dfrac{b_i}{a_i}$ из одного интервала в смежный знак значения выражения (2) меняется на противоположный, если k_i — нечетное число, и не меняется, если k_i — четное число.

Пример 4. Решить неравенство $(x-3)^2\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x-2\dfrac{16}{25}\right) \le 0.$

Решение. 1. Рассмотрим выражение $f(x)=(x-3)^2\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x-2\dfrac{16}{25}\right).$
2. $D(f) = \boldsymbol{R}$.

3. Решим уравнение $f(x) = 0$, или $(x-3)^2\left(x-\sqrt{7}\right)\left(x-2\dfrac{16}{25}\right)=0.$
Отсюда $x = 3$, или $x=\sqrt{7}$, или $x = 2{,}64$.
Сравним полученные числа. Так как $7 < 9$, то $\sqrt{7}<\sqrt{9}$ и $\sqrt{7}<3$.
Аналогично из неравенства $7 > 2{,}64^2 = 6{,}9696$ получаем:

$$\sqrt{7}>\sqrt{2{,}64^2} \text{ и } \sqrt{7}>2{,}64.$$

4. Так как в записи выражения $f(x)$ все двучлены записаны в каноническом виде, то на промежутке $(3; +\infty)$ выражение положительно. Далее расставляем знаки, учитывая кратность корней, как показано на рисунке 3.3.

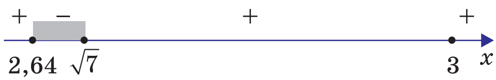

Рис. 3.3

Отсюда $f(x) \le 0$ при всех значениях $x \in \left[2{,}64;\ \sqrt{7}\right] \cup \{3\}$.
Ответ: $\left[2{,}64;\ \sqrt{7}\right] \cup \{3\}$.

Методические рекомендации. Опишем один из способов составления различных неравенств с заданными ответами.

Используя метод неопределенных коэффициентов, дробь вида $\dfrac{(x-a_1)\cdot(x-a_2)\cdot \ldots \cdot(x-a_n)}{(x-b_1)\cdot(x-b_2)\cdot \ldots \cdot(x-b_m)}$, где $n < m$, можно разложить на сумму дробей $\dfrac{A_1}{x-b_1}+\dfrac{A_2}{x-b_2}+\ldots+\dfrac{A_m}{x-b_m}$.

Например, представим выражение $\dfrac{(x-a)(x-3)}{(x-2)(x-1)(x+2)}$ в виде суммы дробей $\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+2}$.

Для этого сложим дроби и приравняем числители. Получим равенство двух многочленов второй степени, верное при всех x, не равных -2; 1; 2:

$$(x-a)(x-3) = A(x-1)(x+2) + B(x-2)(x+2) + C(x-2)(x-1).$$

Далее подставим последовательно в это равенство $x = 1$, $x = 2$ и $x = -2$. В итоге получим три соотношения:

$$\begin{cases} 2(a-1) = -3B, \\ a-2 = 4A, \\ 5(a+2) = 12C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{2(1-a)}{3}, \\ A = \dfrac{a-2}{4}, \\ C = \dfrac{5(a+2)}{12}. \end{cases}$$

Теперь, придавая a разные значения, будем получать значения A, B, C. Например, при $a = 3$ получаем: $A = \dfrac{1}{4}$, $B = -\dfrac{4}{3}$, $C = \dfrac{25}{12}$, то есть

$$\frac{(x-3)(x-3)}{(x-2)(x-1)(x+2)} = \frac{1}{4(x-2)} - \frac{4}{3(x-1)} + \frac{25}{12(x+2)},$$

или

$$\frac{12(x-3)(x-3)}{(x-2)(x-1)(x+2)} = \frac{3}{x-2} - \frac{16}{x-1} + \frac{25}{x+2}.$$

Таким образом, учитель, имея неравенство $\dfrac{(x-3)(x-3)}{(x-2)(x-1)(x+2)} \geq 0$ с готовым ответом, предлагает ученику решить неравенство

$$\frac{3}{x-2} - \frac{16}{x-1} + \frac{25}{x+2} \geq 0.$$

Значения коэффициентов A, B, C зависят от значения параметра a, поэтому, меняя значения для a, получаем разные рациональные неравенства с известным ответом.

Тренировочные упражнения

Решите неравенство **(1–5)**.

1. $\dfrac{x^2-8x+15}{x-5} \geq 0.$

2. $(x-4)^2\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x-2\dfrac{6}{25}\right) \leq 0.$

3. $\dfrac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1.$

4. $\dfrac{x^2-6x+8}{x-1} + \dfrac{x-4}{x^2-3x+2} \leq 0.$

5. $\dfrac{3x^2-2x-1}{2x^2+5x+3} < \dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+7x+4}.$

Неравенства, содержащие иррациональные выражения

Решение иррациональных неравенств основано на свойствах числовых неравенств:

Если обе части неравенства — положительные числа, то при их возведении в положительную четную степень знак неравенства сохраняется:

$$0 < a < b \Leftrightarrow a^{2n} < b^{2n},\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Если обе части неравенства возвести в положительную нечетную степень, то знак неравенства сохраняется:

$$a < b \Leftrightarrow a^{2n+1} < b^{2n+1},\ n \in \boldsymbol{N}.$$

Пример 5. Решить неравенство $\sqrt{x+18} < 2-x$.

Решение. Если $2 - x < 0$ или $2 - x = 0$, то исходное неравенство не выполняется, так как $\sqrt{x+18} \geq 0$.

Пусть $2 - x > 0$, тогда при возведении обеих частей неравенства в квадрат получим на его области определения равносильную систему неравенств:

$$\begin{cases} x+18 < (2-x)^2, \\ x+18 \geq 0, \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x+2) > 0, \\ x \geq -18, \\ x < 2. \end{cases}$$

На рисунке 3.4 представлен графический способ получения решения последней системы неравенств.

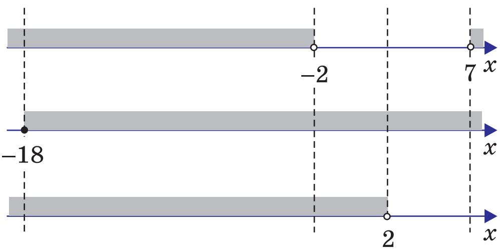

Рис. 3.4

На рисунке 3.5 представлен другой способ графического решения последней системы неравенств с использованием одной числовой прямой Ox.

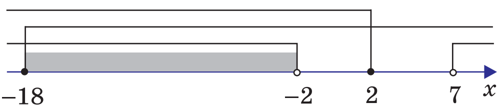

Рис. 3.5

В итоге получаем: $-18 \le x < -2$ — решение системы.
Ответ: $-18 \le x < -2$.

Рассуждения, рассмотренные при решении данного неравенства, позволяют в дальнейшем использовать алгоритм решения неравенств подобного вида:

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x),\ n \in \boldsymbol{N} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^{2n}(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Аналогично можно получить алгоритмы решения иррациональных неравенств следующих видов: $\sqrt[2n]{f(x)} \vee g(x)$, $\sqrt[2n]{f(x)} \vee \sqrt[2n]{g(x)}$, $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee \sqrt[2n+1]{g(x)}$, $\sqrt[2n+1]{f(x)} \vee g(x)$.

Пример 6. (*МИЭТ, 1999.*) Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + 10x + 9} \ge x^2 - 2x - 3.$$

Решение. 1. Если $x^2 - 2x - 3 \ge 0$, то обе части неравенства неотрицательны. После возведения в квадрат обеих частей неравенства получим неравенство, равносильное исходному, то есть получим систему неравенств, равносильную данному неравенству:

$$\begin{cases} x^2 + 10x + 9 \ge \left(x^2 - 2x - 3\right)^2, \\ x^2 - 2x - 3 \ge 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Для второго неравенства системы (3) имеем: $x^2 - 2x - 3 \ge 0$ при $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

Первое неравенство системы (3) приводим к виду:

$$(x + 1)(x + 9) \ge (x + 1)^2(x - 3)^2 \Leftrightarrow (x + 1)((x + 1)(x - 3)^2 - (x + 9)) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)x(x^2 - 5x + 2) \le 0 \Leftrightarrow (x+1)x\left(x - \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right) \le 0.$$

Заметим, что $0 < \dfrac{5-\sqrt{17}}{2} < \dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$.

Отметим на числовой прямой (рис. 3.6) множество решений первого неравенства системы (3).

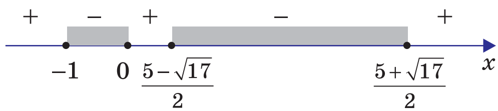

Рис. 3.6

Тогда решениями системы (3) являются (рис. 3.7) все значения

$$x \in \{-1\} \cup \left[3; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right].$$

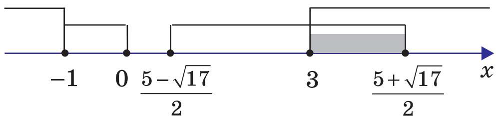

Рис. 3.7

2. Пусть $x^2 - 2x - 3 < 0$. Так как $\sqrt{x^2 + 10x + 9} \ge 0$, то исходное неравенство выполняется на области его определения, то есть получаем систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 10x + 9 \ge 0, \\ x^2 - 2x - 3 < 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Для системы (4) имеем:

$x^2 + 10x + 9 \ge 0$ при $x \in (-\infty; -9] \cup [-1; +\infty)$;

$x^2 - 2x - 3 < 0$ при $x \in (-1; 3)$.

Следовательно, решением системы (4) будет $x \in (-1; 3)$.

Объединяя множество решений систем (3) и (4), получаем ответ.

Ответ: $\left[-1; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$.

Пример 7. (*МИОО, 2009.*) Решить неравенство

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}}.$$

Решение. Выполняя равносильные переходы, получим:

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-1} < \sqrt{x^3 - 6x^2 + 14x - 7}, \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (7-x)(x-1) < x^3 - 6x^2 + 14x - 7, \\ 7 - x \ge 0, \\ x - 1 \ge 0, \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 5x^2 + 6x > 0, \\ 1 < x \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-3) > 0, \\ 1 < x \le 7. \end{cases}$$

С помощью числовой прямой (рис. 3.8) найдем множество решений последней системы неравенств.

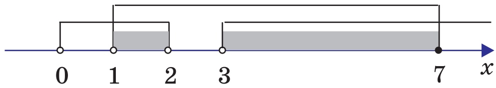

Рис. 3.8

Ответ: $1 < x < 2,\ 3 < x \le 7$.

В следующем примере используем метод расщепления неравенства.

Пример 8. Решите неравенство $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \ge 0$.

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ \sqrt{x^2-x-2} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ (x-2)(x+1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$$

и

$$\begin{cases} x-1 \le 0, \\ \sqrt{x^2-x-2} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1, \\ (x-2)(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

В итоге получаем ответ.

Ответ: $\{-1\} \cup [2;\ +\infty)$.

Тренировочные упражнения

6. Напишите краткую схему решения неравенств при $n \in \boldsymbol{N}$:

а) $\sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x)$;

б) $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}$;

в) $\sqrt[2n+1]{f(x)} \le \sqrt[2n+1]{g(x)}$;

г) $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$.

Решите неравенство **(7—10)**.

7. $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

8. $4x-6 > \sqrt{6x-2x^2}$.

9. $\dfrac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \le 0$.

10. $\sqrt{5-x} < \dfrac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}$.

Неравенства, содержащие показательные выражения

Рассмотрим некоторые стандартные схемы решения показательных неравенств, в которых используют логарифмирование обеих частей неравенства, основанное на следующем свойстве:

При логарифмировании неравенства, левая и правая части которого положительны, по основанию, большему единицы, получаем неравенство того же смысла, что и данное, а при логарифмировании его по положительному основанию, меньшему единицы, — неравенство противоположного смысла.

Пример 9. Решить неравенство $(x^2 + x + 1)^x < 1$.

Решение. Выражение $(x^2+x+1)^x$ положительно, так как $x^2+x+1 > 0$ при всех значениях $x \in \boldsymbol{R}$. Прологарифмируем обе части данного неравенства:

$$\lg (x^2 + x + 1)^x < \lg 1 \Leftrightarrow x \lg (x^2 + x + 1) < 0.$$

Полученное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \lg\left(x^2 + x + 1\right) < 0 \end{cases} \qquad (5)$$

и

$$\begin{cases} x < 0, \\ \lg\left(x^2 + x + 1\right) > 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Решим систему (5):

$$(5) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 0 < x^2 + x + 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 + x + 1 > 0, \\ x(x+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x + 1 < 0 \end{cases} \text{— нет решений.}$$

Решим систему (6):

$$(6) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + x + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x(x+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -1.$$

Ответ: $x < -1$.

Результатом решения данного неравенства является алгоритм решения неравенства вида $(\varphi(x))^{f(x)} > (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x), \\ \varphi(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$

В частности:

Если число $a > 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$.

Если число $0 < a < 1$, то $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$.

Пример 10. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} > 1.$

Решение. Область допустимых значений переменной x определяется условием: $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -1. \end{array}\right.$

При этих значениях переменной преобразуем левую часть данного неравенства:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} = \left(2^{-1}\right)^{\log_2\left(x^2-1\right)} = \left(2^{\log_2\left(x^2-1\right)}\right)^{-1} = \left(x^2-1\right)^{-1} = \frac{1}{x^2-1}.$$

Получаем неравенство:

$$\frac{1}{x^2-1} > 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-2}{x^2-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{(x-1)(x+1)} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{2} < x < -1 \\ 1 < x < \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\sqrt{2};\ -1\right) \cup \left(1;\ \sqrt{2}\right)$.

Тренировочные упражнения

11. Напишите краткую схему решения неравенств:

а) $(\varphi(x))^{f(x)} \geq (\varphi(x))^{g(x)}$; б) $(f(x))^{\varphi(x)} > (g(x))^{\varphi(x)}$.

Решите неравенство **(12–14)**.

12. $2^{x^2+3x-3} - 2^{x^2+3x-5} - 96 \geq 0.$

13. $(2^x - 4)(x^2 - 2x - 3) > 0.$

14. $\left(\frac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} > \left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2}.$

Неравенства, содержащие логарифмические выражения

Приведем некоторые стандартные схемы решения логарифмических неравенств, в которых используют потенцирование обеих частей неравенства, основанное на следующем свойстве:

Если $b > c$ и $a > 1$, то $a^b > a^c$.
Если $b > c$, но $0 < a < 1$, то $a^b < a^c$.

Пример 11. Решить неравенство

$$\log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3).$$

Решение. Так как для оснований логарифмов, стоящих в обеих частях неравенства, выполняется условие $0 < 0,1 < 1$, то получаем неравенство $(0,1)^{\log_{0,1}\left(x^2+x-2\right)}<(0,1)^{\log_{0,1}(x+3)}$, равносильное системе неравенств: $\begin{cases} x^2+x-2<x+3, \\ x^2+x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)<0, \\ (x-1)(x+2)>0. \end{cases}$

Отметим на числовой прямой множество решений последней системы неравенств (рис. 3.9).

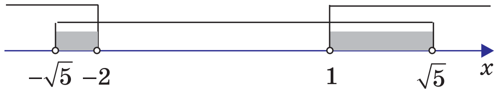

Рис. 3.9

Ответ: $\left(-\sqrt{5};\,-2\right)\cup\left(1;\,\sqrt{5}\right)$.

Отсюда получаем одну из схем решения логарифмического неравенства вида $\log_a f(x)\ge\log_a g(x)$.

Если $0<a<1$, то $\log_a f(x)\ge\log_a g(x)\Leftrightarrow g(x)\ge f(x)>0$.
Если $a>1$, то $\log_a f(x)\ge\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)\ge g(x)>0$.

Пример 12. (*МИОО, 2009.*) Решить неравенство

$$\log_x(7-x)<\log_x(x^3-6x^2+14x-7)-\log_x(x-1).$$

Решение. Выполняя равносильные переходы, получим, что данное неравенство равносильно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} \log_x\left((7-x)(x-1)\right)<\log_x\left(x^3-6x^2+14x-7\right), \\ x-1>0, \\ 7-x>0,\ x>0,\ x\ne1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (7-x)(x-1)<x^3-6x^2+14x-7, \\ 1<x<7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-5x^2+6x>0, \\ 1<x<7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)(x-3)>0, \\ 1<x<7. \end{cases}$$

На рисунке 3.10 представлена графическая интерпретация получения решения последней системы неравенств.

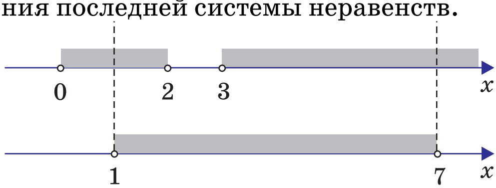

Рис. 3.10

Ответ: $(1;\,2)\cup(3;\,7)$.

Пример 13. (*ЕГЭ-2010*) Решить неравенство

$$\frac{2\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)} \le \frac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}.$$

Решение. В соответствии с определением логарифма входящие в неравенство выражения имеют смысл при выполнении условий:

$$\begin{cases} |x| \ne 0, \\ 2^{x-1} \ne 1, \\ x+7>0, \\ x+7 \ne 1, \\ x+12>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0, \\ x-1 \ne 0, \\ x>-7, \\ x \ne -6, \\ x>-12. \end{cases}$$

Из системы получаем все допустимые значения:

$$x \in (-7;\,-6) \cup (-6;\,0) \cup (0;\,1) \cup (1;\,+\infty).$$

При этих значениях переменной x по свойствам логарифма справедливы равенства

$$\frac{\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)} = \log_{x+7}|x| \text{ и } \frac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)} = \log_{x+7}(x+12),$$

и исходное неравенство приводится к виду

$$2\log_{x+7}|x| \le \log_{x+7}(x+12) \Leftrightarrow \log_{x+7} x^2 \le \log_{x+7}(x+12).$$

Последнее неравенство на множестве допустимых значений равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x+7<1, \\ x^2 \ge x+12 \end{cases} \\ \begin{cases} x+7>1, \\ x^2 \le x+12 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -7<x<-6, \\ x^2-x-12 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>-6, \\ x^2-x-12 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -7<x<-6, \\ (x-4)(x+3) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x>-6, \\ (x-4)(x+3) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -7<x<-6, \\ -3 \le x \le 4. \end{array}\right.$$

С учетом области определения данного неравенства получаем ответ.

Ответ: **$(-7;\,-6) \cup [-3;\,0) \cup (0;\,1) \cup (1;\,4]$.**

Тренировочные упражнения

15. Напишите краткую схему решения неравенства

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x).$$

Решите неравенство **(16–20)**.

16. $\dfrac{\lg x}{x^2-x-6} \ge 0.$

17. $\log_{13}(x^2+2x+4) + \log_{13}(x-2) \le \log_{13}(x^3-x^2+4x-3).$

18. $\dfrac{\log_{2^{x+10}} 24}{\log_{2^{x+10}}\left(x^2-16\right)} \geq \dfrac{\log_2\left(x^2+11x+24\right)}{\log_2\left(x^2-16\right)}$.

19. $(x+1)\log_3 6+\log_3\left(2^x-\dfrac{1}{6}\right)\leq x-1$.

20. $\log_{x+4}(5x+20)\leq \log_{x+4}(x+4)^2$.

Неравенства, содержащие выражения с модулями

Геометрическая интерпретация неравенств позволяет легко и красиво решать как простые, так и сложные задачи. Наиболее распространенная интерпретация неравенств связана с модулем или расстоянием на координатной прямой.

Геометрический смысл модуля:

> Модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками координатной прямой, координаты которых соответствуют этим числам.

Например, запись $|a-b|$ означает расстояние между точками a и b; $|a+b|$ — расстояние между точками a и $-b$; $|a|=|a-0|$ — расстояние между точками a и 0.

Пример 14. Решить неравенство $|x-2|>5$.

Решение. Запись $|x-2|$ есть расстояние на координатной прямой от точки x до точки 2. Для решения данного неравенства необходимо на координатной оси найти такие точки, расстояние от которых до точки 2 больше 5. Справа от точки 2 расположена точка 7 на расстоянии 5 единиц, а слева — точка –3. Поэтому данному неравенству удовлетворяют все значения $x\in(-\infty;-3)\cup(7;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-3)\cup(7;+\infty)$.

Из решения данного неравенства следует, что неравенству $|x-a|>b$, где $b>0$, удовлетворяют все точки числовой прямой, расположенные от точки a на расстоянии, большем b, то есть имеем:

$$|x-a|>b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a>b \\ x-a<-b. \end{array}\right.$$

Отметим, что указанная равносильность выполняется при любом b.

Обобщением этого результата является следующая схема решения неравенства с модулем: $|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)>g(x) \\ f(x)<-g(x). \end{array}\right.$

Пример 15. Решить неравенство $|x+5|+|x-3|>8$.

Решение. Так как расстояние между точками -5 и 3 равно 8, то решениями уравнения $|x+5|+|x-3|=8$ являются все числа из отрезка $[-5; 3]$. Для любой точки, расположенной вне отрезка $[-5; 3]$ (справа или слева), сумма расстояний от точек -5 и 3 больше 8.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (3; +\infty)$.

Приведем еще некоторые стандартные схемы для решения неравенств с модулями.

- $|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), \\ f(x)>-g(x); \end{cases}$
- $|f(x)|>|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)>g^2(x) \Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))>0.$

Пример 16. Решить неравенство

$$|x^7+4x^5+x^2+2x-3|<x^7+4x^5-x^2-2x+3.$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^7+4x^5+x^2+2x-3<x^7+4x^5-x^2-2x+3, \\ x^7+4x^5+x^2+2x-3>-\left(x^7+4x^5-x^2-2x+3\right), \end{cases}$$

или после приведения подобных членов:

$$\begin{cases} x^2+2x-3<0, \\ x^5\left(x^2+4\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<1, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1.$$

Ответ: $0<x<1$.

Пример 17. (*МИОО, 2011.*) Решить неравенство

$$\left((x+1)^{-1}-(x+6)^{-1}\right)^2 \le \frac{|x^2-10x|}{\left(x^2+7x+6\right)^2}.$$

Решение. Выполнив равносильные преобразования, получим:

$$\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+6}\right)^2 \le \frac{|x^2-10x|}{\left(x^2+7x+6\right)^2} \Leftrightarrow \frac{|x^2-10x|-25}{\left(x^2+7x+6\right)^2} \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-10x|-25 \ge 0, \\ x^2+7x+6 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^2-10x| \ge 25, \\ x \ne -1, \\ x \ne -6. \end{cases}$$

Решим неравенство полученной системы:

$$|x^2-10x|\ge 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-10x\ge 25 \\ x^2-10x\le -25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 5+5\sqrt{2} \\ x\le 5-5\sqrt{2} \\ x=5. \end{array}\right.$$

Учтем также, что $x\ne -1$ и $x\ne -6$.
Ответ: $(-\infty;\,-6)\cup\left(-6;\,5-5\sqrt{2}\right]\cup\{5\}\cup\left[5+5\sqrt{2};\,+\infty\right)$.

Тренировочные упражнения

Решите неравенство **(21–24)**.
21. $|x^3+2x^2+8x-7|\le x^3+4x^2-8x+7$.
22. $||x^2-8x+2|-x^2|\ge 2x+2$.
23. $2<\left|\log_{\frac{1}{2}}(3x+1)-4\right|\le 3$. **24.** $x(|x^2-1|-2|x-1|)<0$.

Метод замены

Как при решении уравнений, так и при решении неравенств достаточно часто бывает эффективным *метод замены*. Возможны два вида замены.

1. В случае, когда неравенство имеет вид $F(f(x))\vee 0$, где символ «$\vee$» представляет собой один из знаков неравенств «$>$», «$<$», «$\ge$», «$\le$», заменой $f(x)=t$ оно сводится к неравенству (обычно рациональному) $F(t)\vee 0$. Решением последнего неравенства относительно t может оказаться один промежуток или объединение нескольких промежутков. Отметим сразу, что при введении новой переменной удобно не указывать ее область значений при решении нового неравенства с этой переменной. При выполнении обратной замены это нужно учитывать.

• Если в итоге получают $t\in(a;\,b)$, то далее решают систему неравенств $\begin{cases} f(x)>a, \\ f(x)<b. \end{cases}$

• Если $t\in(-\infty;\,a)\cup(b;\,+\infty)$, то решают совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x)<a \\ f(x)>b. \end{array}\right.$$

2. Иногда в сложных неравенствах $F(x)\vee 0$ удается достигнуть упрощения путем замены $x=f(t)$. В этом случае получается неравенство $F(f(t))\vee 0$, которое оказывается более простым. Далее после решения последнего неравенства выполняется обратная замена.

Введение одной новой переменной

Пример 18. Решить неравенство $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-2}>2.$

Решение. Обозначим $\sqrt{x-2}=t$, где $t\geq 0$. Тогда $x=t^2+2$ и, подставляя далее в неравенство вместо переменной x ее выражение через t, приведем данное неравенство к виду $\sqrt{2t^2+7}>t+2.$

Так как $t+2>0$, то получаем равносильное неравенство $2t^2+7>$ $>t^2+4t+4$, или $t^2-4t+3>0$, при $t\geq 0$. Отсюда получаем:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t<1\\ t>3,\end{array}\right.\\ t\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\leq t<1\\ t>3.\end{array}\right.$$

Возвращаемся к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l}0\leq\sqrt{x-2}<1\\ \sqrt{x-2}>3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\leq x-2<1,\\ x-2>9\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\leq x<3\\ x>11.\end{array}\right.$$

Ответ: $2\leq x<3$, $x>11$.

Пример 19. (*МИОО, 2011.*) Решить неравенство

$$\frac{\log^2_{2x-3}\dfrac{1}{3x-5}+\log_{2x-3}\left(9x^2-30x+25\right)+7}{2\cdot\log_{2x-3}\left(6x^2-19x+15\right)-1}\leq 3.$$

Решение. Так как $6x^2-19x+15=(2x-3)(3x-5)$ и в соответствии с определение логарифма $2x-3>0$, $3x-5>0$, то данное неравенство равносильно неравенству $\dfrac{\log^2_{2x-3}(3x-5)+2\log_{2x-3}(3x-5)+7}{2\cdot\left(1+\log_{2x-3}(3x-5)\right)-1}\leq 3.$

Пусть $\log_{2x-3}(3x-5)=t$. Тогда получаем $\dfrac{t^2+2t+7}{2t+1}\leq 3$, то есть $\dfrac{(t-2)^2}{2t+1}\leq 0$. Решение последнего неравенства есть $t\in(-\infty;-0{,}5)\cup\{2\}$.

Выполняя обратную замену, получаем: $\left[\begin{array}{l}\log_{2x-3}(3x-5)=2\\ \log_{2x-3}(3x-5)<-0{,}5.\end{array}\right.$

Решим уравнение совокупности:

$$\log_{2x-3}(3x-5)=2\Leftrightarrow\begin{cases}3x-5=(2x-3)^2,\\ 2x-3>0,\\ 2x-3\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\dfrac{7}{4},\end{array}\right.\\ x>1{,}5,\\ x\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{7}{4}.$$

Решим неравенство совокупности:

$$\log_{2x-3}(3x-5) < -0{,}5 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{2x-3}\left((3x-5)^2(2x-3)\right) \le 0, \\ 3x-5>0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство системы, приходится рассматривать два случая:

1) $2x-3>1$, то есть $x>2$. Тогда и $3x-5>1$, и $(3x-5)^2(2x-3)>1$, а следовательно, $\log_{2x-3}((3x-5)^2(2x-3))>0$;

2) $0<2x-3<1$, то есть $1{,}5<x<2$. Тогда $3x-5\in(-0{,}5;\,1)$, а с учетом второго неравенства системы $3x-5\in(0;\,1)$, следовательно,

$$0<(3x-5)^2(2x-3)<1$$

и

$$\log_{2x-3}((3x-5)^2(2x-3))>0.$$

Таким образом, ни в том, ни в другом случае неравенство совокупности решений не имеет.

Ответ: $\frac{7}{4}$.

Введение двух новых переменных

Пример 20. (*Тренировочная работа МИОО, ЕГЭ-2011.*) Решить неравенство $\frac{x^2-2x+1}{(x+2)^2}+\frac{x^2+2x+1}{(x-3)^2}\le\frac{\left(2x^2-x+5\right)^2}{2(x+2)^2(x-3)^2}$.

Решение. Входящие в неравенство выражения имеют смысл при $x\ne-2$ и $x\ne3$.

При всех остальных x неравенство равносильно следующему:

$$2(x-3)^2(x-1)^2+2(x+2)^2(x+1)^2\le(2x^2-x+5)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(x^2-4x+3)^2+2(x^2+3x+2)^2\le(2x^2-x+5)^2.$$

Заметим, что $2x^2-x+5=(x^2-4x+3)+(x^2+3x+2)$.

Пусть $x^2-4x+3=u$ и $x^2+3x+2=v$.

Тогда последнее неравенство примет вид:

$$2u^2+2v^2\le(u+v)^2 \Leftrightarrow 2u^2+2v^2\le u^2+2uv+v^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u^2-2uv+v^2\le0 \Leftrightarrow (u-v)^2\le0.$$

Отсюда следует, что $u=v$. Выполняя обратную замену, получаем: $x^2-4x+3=x^2+3x+2$, то есть $x=\frac{1}{7}$.

Ответ: $\frac{1}{7}$.

Тренировочные упражнения

Решите неравенство **(25–28)**.

25. $\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}\le 3.$

26. $\dfrac{1}{6x^2-5x}\ge \dfrac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}.$

27. $\sqrt{17\cdot 9^x-4^x}\ge 3^x-3\cdot 2^x.$

28. $\dfrac{\log_4\left(x^4-4x^3+4x^2\right)+\log_{0,25}\left(6x^2-12x-9\right)}{x^2-2x-8}\ge 0.$

Разбиение области определения неравенства на подмножества

Разбиение ОДЗ неизвестной неравенства на промежутки позволяет упростить решение некоторых неравенств. В этом случае неравенства рассматривают отдельно на каждом промежутке.

Пример 21. **(*МИЭТ, 2002.*)** Решить неравенство $\dfrac{1}{|x-9|}\le\dfrac{x-3}{4x-11}.$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x>9, \\ \dfrac{1}{x-9}\le\dfrac{x-3}{4x-11} \end{cases} \tag{7}$$

и

$$\begin{cases} x<9, \\ \dfrac{1}{9-x}\le\dfrac{x-3}{4x-11}. \end{cases} \tag{8}$$

Для системы (7) имеем:

$$(7)\Leftrightarrow\begin{cases} x>9, \\ \dfrac{x^2-16x+38}{(x-9)(4x-11)}\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>9, \\ \dfrac{\left(x-8+\sqrt{26}\right)\left(x-8-\sqrt{26}\right)}{(x-9)(4x-11)}\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow x\ge 8+\sqrt{26}.$$

Для системы (8) имеем:

$$(8)\Leftrightarrow\begin{cases} x<9, \\ \dfrac{(x-4)^2}{(x-9)(4x-11)}\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x<2,75 \\ x=4. \end{array}\right.$$

Объединяя решения (7) и (8), получаем ответ.

Ответ: $x<2,75$, $x=4$, $x\ge 8+\sqrt{26}$.

Пример 22. Решить неравенство $|x-1|+|x-2|>3+x$.

Решение. Выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в ноль при $x = 1$ (первое) и при $x = 2$ (второе).

Эти числа разбивают числовую прямую на три промежутка: $(-\infty; 1)$, $[1; 2)$ и $[2; +\infty)$. Освобождаясь от знаков модулей, с учетом знаков выражений, стоящих под ними, решим данное неравенство на каждом из этих промежутков (рис. 3.11).

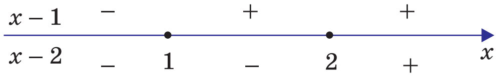

Рис. 3.11

Если $x < 1$, то исходное неравенство равносильно неравенству:

$$-x+1-x+2>3+x \Leftrightarrow x<0.$$

Получаем, что $x < 0$ есть решение исходного неравенства на рассматриваемом промежутке.

Если $1 \le x < 2$, то исходное неравенство равносильно неравенству:

$$x-1-x+2>3+x \Leftrightarrow x<-2.$$

Следовательно, на этом промежутке решений нет.

Если $x \ge 2$, то исходное неравенство равносильно неравенству:

$$x-1+x-2>3+x \Leftrightarrow x>6.$$

Получаем, что $x > 6$ есть решение исходного неравенства на рассматриваемом промежутке. Объединяя полученные решения, запишем ответ.

Ответ: $x < 0$, $x > 6$.

Пример 23. Решить неравенство $\log_2\left(x^2-4\right)-3\log_2\dfrac{x+2}{x-2}>2.$

Решение. Область определения данного неравенства определяется условием: $(x-2)(x+2)>0$.

Отсюда получаем два промежутка: $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $x > 2$. Тогда неравенство примет следующий вид:

$$\log_2(x-2)+\log_2(x+2)-3\log_2(x+2)+3\log_2(x-2)>2,$$

или

$$2\log_2(x-2)-\log_2(x+2)>1.$$

Отсюда $(x-2)^2>2(x+2)$, или $x(x-6)>0$.

С учетом условия $x > 2$ получаем $x > 6$.

2. Пусть $x < -2$. В этом случае неравенство примет вид:

$$\log_2(2-x)+\log_2(-x-2)-3\log_2(-x-2)+3\log_2(2-x)>2,$$

или

$$2\log_2(2-x)-\log_2(-x-2)>1.$$

Отсюда $(2-x)^2 > 2(-x-2)$, или $x^2 - 2x + 8 > 0$.

Так как уравнение $x^2 - 2x + 8 = 0$ не имеет корней и старший коэффициент положителен, то последнее неравенство выполняется при всех действительных значениях x, то есть на всем рассматриваемом промежутке.

В этом случае все значения $x < -2$ являются решениями неравенства. Объединяя полученные решения, запишем ответ.

Ответ: $x < -2$ или $x > 6$.

Тренировочные упражнения

Решите неравенство **(29–32)**.

29. $2x - 5 + 2|x-3| < |x+1|$.

30. $\sqrt{x+1} - 1 \le x|x-2| - 4x$.

31. $\log_{5-x}(x^2 - 14x + 49) \le 2\log_{5-x}(8x - x^2 - 7) - 2$.

32. $1 - \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+5}{x+3} \ge \log_9(x+1)^2$.

Ответы к тренировочным упражнениям

1. $[3; 5) \cup (5; +\infty)$. **2.** $\left[\sqrt{5}; 2\dfrac{6}{25}\right] \cup \{4\}$. **3.** $(-\infty; -7) \cup (-4; -2)$. **4.** $(-\infty; 1) \cup (2; 4]$. **5.** $\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{4}{3}\right) \cup (-1; 1)$. **6.** а) $\sqrt[2n]{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g^{2n}(x), \\ g(x) \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right.$

б) $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \ge 0; \end{cases}$ в) $\sqrt[2n+1]{f(x)} \le \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \le g(x)$; г) $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2n+1}(x)$. **7.** $(3; 5]$. **8.** $(2; 3]$. **9.** $-3 < x < 0$, $x = 0{,}5$, $x = 2$. **10.** $1 < x < 2$, $4 < x \le 5$. **11.** а) $(\varphi(x))^{f(x)} \ge (\varphi(x))^{g(x)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ \varphi(x) > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \ge f(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1 \end{cases} \\ \varphi(x) = 1; \end{array}\right.$ б) $(f(x))^{\varphi(x)} > (g(x))^{\varphi(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) > 0, \\ \varphi(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$

12. $(-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$. **13.** $(-1; 2) \cup (3; +\infty)$. **14.** $-\sqrt{2+\sqrt{3}} < x < -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $-\sqrt{2-\sqrt{3}} < x < 0$, $0 < x < \sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\sqrt{\dfrac{2}{3}} < x < \sqrt{2+\sqrt{3}}$. **15.** $\log_{\varphi(x)} f(x) >$

$$>\log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)>g(x)>0, \\ \varphi(x)>1 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x)>f(x)>0, \\ 0<\varphi(x)<1. \end{cases}\end{array}\right.$$ **16.** $(0;\ 1] \cup (3;\ +\infty)$. **17.** $(2;\ 5]$.

18. $[-11;\ -10) \cup (-10;\ -8) \cup \left(4;\ \sqrt{17}\right)$. **19.** $(-\log_2 6; -\log_2 3]$. **20.** $(-4; -3) \cup$ $\cup\ [1;\ +\infty)$. **21.** $[-3;\ 1] \cup [7;\ +\infty)$. **22.** $(+\infty;\ 0] \cup [1;\ 2] \cup [5;\ +\infty)$.

23. $\left[-\frac{127}{384}; -\frac{21}{64}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{6}\right]$. **24.** $(-\infty;\ -3) \cup (0;\ 1)$.**25.** $[0;\ 1] \cup (4;\ 16)$.

26. $0 < x \le \frac{1}{3}$ или $\frac{1}{2} \le x < \frac{5}{6}$. **27.** $x \ge \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{17}}$. **28.** $(-\infty; -2) \cup \{-1; 3\} \cup (4; +\infty)$.

29. $(-\infty;\ -2) \cup (0;\ 4)$. **30.** $[0;\ 4]$. **31.** $[3;\ 4)$. **32.** $[-7;\ -5) \cup (-2;\ -1) \cup$ $\cup\ (-1;\ 1]$.

Литература

1. *Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В.* Алгебра и начала анализа: учеб. для 11 кл. общеобразоват. учреждений. — 4-е изд. — М.: Просвещение, 2005. — 448 с.

2. Единый государственный экзамен 2011. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. — М.: Интеллект-Центр, 2010.

3. *Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Ященко И.В.* ЕГЭ 2011. Математика: Сборник тренировочных работ. — М.: МЦНМО, 2010.

Лекция 4

Решение неравенств функционально-графическими методами

Анализ содержания школьных учебников показывает, что в большинстве из них методам решения неравенств с использованием свойств функций не уделяется должного внимания, а в заданиях ЕГЭ почти каждый год предлагаются неравенства, решение которых упрощается, если применить свойства функций. Проверка работ ЕГЭ подтверждает, что большинство учащихся решают неравенства с использованием стандартных, алгоритмических методов, что иногда приводит к громоздким выкладкам. В связи с этим процент выполнения задания С3 (решение неравенства) невысок.

Область применения свойств функций при решении неравенств очень широка. Использование свойств (ограниченность, монотонность и т.д.) функций, входящих в неравенства, позволяет применить нестандартные методы решения к стандартным по формулировке задачам — неравенствам. Практика показывает, что умение использовать необходимые свойства функций при решении неравенств позволяет учащимся выбирать более рациональный способ решения.

В учебниках крайне редки задания на понимание функциональной символики, поэтому ученикам необходимо предлагать такого рода задания не только при изучении функций, но и при решении уравнений и неравенств.

В качестве такого задания рассмотрим пример, связанный с композицией функций.

Пример 1. (*МИЭТ, 2002.*) Пусть $f(x)=\dfrac{x^2-14x+33}{9-x^2}$, $g(x)=\sqrt{x}$. Решите неравенство $f(g(x-9))\geq f(4)$.

Решение. Так как $g(x-9)=\sqrt{x-9}$, то

$$f(g(x-9))=f(\sqrt{x-9})\frac{\left(\sqrt{x-9}\right)^2-14\sqrt{x-9}+33}{9-\left(\sqrt{x-9}\right)^2}.$$

Так как $f(4)=\dfrac{4^2-14\cdot 4+33}{9-4^2}=1$, то неравенство $f(g(x-9))\geq f(4)$ примет вид $\dfrac{\left(\sqrt{x-9}\right)^2-14\sqrt{x-9}+33}{9-\left(\sqrt{x-9}\right)^2}\geq 1.$

Сделав замену $\sqrt{x-9}=t$, где $t \geq 0$, получим систему неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{t^2-14t+33}{9-t^2}\geq 1,\\ t\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{t^2-7t+12}{9-t^2}\geq 0,\\ t\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(t-3)(t-4)}{(t-3)(t+3)}\leq 0,\\ t\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{t-4}{t+3}\leq 0,\\ t\geq 0,\ t\neq 3\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\leq t<3\\ 3<t\leq 4.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к переменной x, получим:

$$\left[\begin{array}{l}0\leq\sqrt{x-9}<3\\ 3<\sqrt{x-9}\leq 4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0\leq x-9<9\\ 9<x-9\leq 16\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}9\leq x<18\\ 18<x\leq 25.\end{array}\right.$$

Ответ: $9 \leq x < 18$, $18 < x \leq 25$.

Использование области определения функции

Предварительный анализ области допустимых значений неизвестной иногда позволяет получить решения без преобразований неравенства.

Если при рассмотрении неравенства выясняется, что область определения неравенства состоит из одного или нескольких чисел, то достаточно проверить, является или нет каждое из этих чисел решением данного неравенства.

Если область определения неравенства окажется пустым множеством, то в этом случае неравенство решений не имеет.

В некоторых случаях область допустимых значений неизвестной неравенства позволяет оценить левую и правую части неравенства и сделать вывод о его решении.

Пример 2. (*МИЭТ, 1998.*) Решить неравенство

$$\sqrt{-x^2+3x-2}>x^3-9.$$

Решение. Область определения неравенства задается условием:

$$-x^2+3x-2\geq 0 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 2.$$

Для этих значений x получаем:

$$1\leq x\leq 2 \Leftrightarrow 1\leq x^3\leq 8 \Leftrightarrow -8\leq x^3-9\leq -1,$$

то есть правая часть исходного неравенства отрицательна на его области определения. Следовательно, неравенство справедливо при всех $1 \leq x \leq 2$.

Ответ: $1 \leq x \leq 2$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\left(\sqrt{x^2-6x+5}+1\right)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{12x-2x^2-10}+1\right)>0.$$

Решение. Область определения неравенства задается условиями:

$$\begin{cases} x^2-6x+5\ge 0, \\ 12x-2x^2-10\ge 0, \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5. \end{array}\right.$$

Подставляя полученные значения в неравенство, получим:

— при $x = 1$ исходное неравенство примет вид $\log_5\frac{1}{5}+1>0$, или $0 > 0$, то есть будет неверно;

— при $x = 5$ имеем $\frac{1}{5}>0$ —верное неравенство.

Ответ: 5.

Методические рекомендации. Покажем один из способов составления примеров, решение которых предполагает использование области определения неравенства.

Пусть даны три числа, $a < b < c$, тогда для неравенства вида

$$\sqrt[2n]{-(x-a)(x-b)}+\sqrt[2k]{-(x-b)(x-c)}\le f(x),$$

где $f(x)$ — некоторый многочлен, область определения неравенства состоит из одного числа b. Для выполнения неравенства достаточно подобрать многочлен $f(x)$ с условием $f(b)\ge 0$. Например, решением неравенства $\sqrt[6]{-(x-2)(x-3)}+\sqrt[4]{-(x-3)(x-4)}\le x^2+2$ является одно число $x = 3$.

Тренировочные упражнения

Решите неравенство **(1–3)**.

1. $\sqrt{1-x^4}+\sqrt[4]{x^2-1}<5^x-\log_3\left(2+x^6\right)$.

2. $\sqrt{\cos x}<\sqrt{1-x^2+\cos x}$.

3. $\sqrt[6]{1-x^2}>\log_3 x$.

Использование непрерывности функции

Непрерывность функции является одним из важнейших понятий, с помощью которого доказываются многие утверждения в математике. Широко используется это понятие при изучении свойств элементарных функций, которые применяются при решении различных задач.

Второе обобщение метода интервалов

Основная идея метода интервалов, рассмотренная в лекции 3: знак произведения (частного) определяется знаками сомножителей (делимого и делителя). В качестве сомножителей были рассмотрены линейные функции, но из школьного курса математики учащимся известны промежутки знакопостоянства и других функций: квадратичной, степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических. Расширение возможностей метода интервалов основано на свойстве непрерывных функций:

Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

А как известно, функции, полученные из элементарных функций с помощью арифметических действий или их композиции, непрерывны на своей области определения. Поэтому метод интервалов можно успешно использовать и при решении неравенств, содержащих достаточно широкий класс функций.

Так, например, метод интервалов допускает обобщение на выражения вида $f_1^{k_1}(x)\cdot f_2^{k_2}(x)\cdot \ldots \cdot f_n^{k_n}(x)$, где $f_i(x)$ — функции, непрерывные на своей области определения ($i = 1, 2, ..., n$; $k_1, k_2, ..., k_n$ — фиксированные натуральные числа).

Множество решений неравенства при использовании метода интервалов можно представить в виде объединения промежутков, границами которых являются либо нули функции, либо граничные точки ее области определения.

Рассмотрим неравенства, правая часть которых равна нулю, а левая часть представлена в виде произведения или частного функций с известными промежутками знакопостоянства.

Пример 4. Решить неравенство $\dfrac{(2x-5)\left(32^{\frac{1}{x}}-4\right)}{\left(3^x-8\right)\left(x^4+4x+20\right)}\geq 0.$

Решение. Так как при $x = -1$ многочлен $x^4 + 4x + 20$ принимает наименьшее значение 17 (докажите с помощью производной), то неравенство $x^4 + 4x + 20 > 0$ выполняется при всех значениях x. Тогда данное неравенство принимает вид $\dfrac{(2x-5)\left(32^{\frac{1}{x}}-4\right)}{3^x-8}\geq 0.$

Используем для его решения метод интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{(2x-5)\left(32^{\frac{1}{x}}-4\right)}{3^x-8}$.

2. Функция $f(x)$ не определена при $x = 0$ и $x = \log_3 8$.

3. Функция $f(x)$ обращается в нуль при $x = 2{,}5$. Отметим, что в точке $x = 2{,}5$ равны нулю два множителя: $2x - 5$ и $32^{\frac{1}{x}}-4$.

4. Найдем промежутки знакопостоянства функции $f(x)$. Так как $0 < \log_3 8 < \log_3 9 < 2{,}5$ и $f(x)5 < 0$, то $f(x) \geq 0$ при всех значениях $x \in (0; \log_3 8) \cup \{2{,}5\}$ (рис. 4.1).

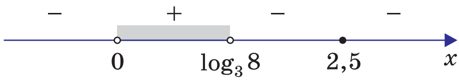

Рис. 4.1

Ответ: $0 < x < \log_3 8$, $x = 2{,}5$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\left(3^{\frac{x-2}{2}}-1\right)\sqrt{3^x-10\sqrt{3^x}+9}\geq 0.$$

Решение. Обозначим $\sqrt{3^x}=t$, где $t>0$. Тогда данное неравенство примет следующий вид

$$\left(\frac{t}{3}-1\right)\sqrt{t^2-10t+9}\geq 0 \Leftrightarrow (t-3)\sqrt{t^2-10t+9}\geq 0. \qquad (1)$$

Используем для его решения метод интервалов.

1. Рассмотрим функцию $f(t)=(t-3)\sqrt{t^2-10t+9}$.

2. Найдем область определения функции $f(t)$. Для этого решим неравенство: $t^2 - 10t + 9 \geq 0$, $(t - 1)(t - 9) \geq 0$, то есть $t \leq 1$ или $t \geq 9$.

Отсюда $D(f) = (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$.

3. Найдем нули функции $f(t)$:

$$(t-3)\sqrt{t^2-10t+9}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{t^2-10t+9}=0\\ t-3=0.\end{array}\right.$$

Из совокупности получаем числа 1, 3, 9, из которых нулями функции являются $t = 1$ или $t = 9$, так как $3 \notin D(f)$.

4. Найдем промежутки знакопостоянства функции $f(t)$. Так как $f(0) < 0$, $f(10) > 0$, то $f(t) \geq 0$ при всех значениях $t \in \{1\} \cup [9; +\infty)$ (рис. 4.2).

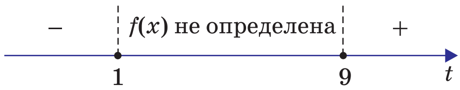

Рис. 4.2

Полученные решения удовлетворяют условию $t > 0$. Вернемся к переменной x.

Так как $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t \geq 9, \end{array}\right.$ то имеем:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3^x}=1 \\ \sqrt{3^x} \geq 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=1 \\ 3^x \geq 81 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x \geq 4. \end{array}\right.$$

Замечание. Удобнее в алгоритм решения неравенства (1) методом интервалов не вносить дополнительное условие $t > 0$, а учитывать его перед возвращением к первоначальной переменной.

Ответ: $\{0\} \cup [4; +\infty)$.

Методические рекомендации. Для решения неравенств методом интервалов легко подобрать примеры следующего вида:

$$f(x)\cdot\sqrt{g(x)} \vee 0, \qquad \frac{f(x)}{\sqrt{g(x)}} \vee 0, \qquad \frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} \vee 0,$$

$$\frac{f(x)}{\log_a g(x)} \vee 0, \qquad \frac{\log_a f(x)}{g(x)} \vee 0, \qquad f(x)\cdot\log_a g(x) \vee 0,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ являются линейными или квадратичными функциями.

Например, $\left(x^2-3x+2\right)\cdot\sqrt{x+2} \leq 0,\ \dfrac{\log_2(x-4)}{x^2-13x+42} \geq 0.$

Рационализация неравенств

Практика экзаменов показывает, что наибольшую сложность для школьников представляют трансцендентные неравенства. При решении этих неравенств методом интервалов вычисление значений функций в промежуточных точках может вызвать трудности вычислительного характера. Для рациональных функций такие вычисления несколько проще. Более того, при решении рациональных неравенств, записанных в каноническом виде, расстановку знаков значений функции на промежутках можно проводить и без контрольных точек.

Чтобы устранить указанные проблемы и расширить возможности применения метода интервалов при решении трансцендентных неравенств, используем идею *рационализации неравенств* (см. [1]), известную в математической литературе под другими названиями (*метод декомпозиции* — В.П. Моденов или *метод замены множителей* — В.И. Голубев).

Метод рационализации заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$ (в конечном счете, рациональное), при которой неравенство $G(x) \vee 0$ равносильно неравенству $F(x) \vee 0$ на области определения выражения $F(x)$.

Это не только устраняет трудности, связанные с непосредственным применением метода интервалов к трансцендентным неравенствам, но и расширяет возможности функционально-графического метода при решении трансцендентных неравенств с параметрами.

Выделим некоторые типовые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G (табл. 4.1), где f, g, h, p, q — выражения с переменной x ($h > 0$, $h \neq 1$; $f > 0$; $g > 0$), a — фиксированное число ($a > 0$, $a \neq 1$).

Таблица 4.1

Замена некоторых типовых выражений

№	Выражение F	Выражение G
1	$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
1а	$\log_a f - 1$	$(a-1)(f-a)$
1б	$\log_a f$	$(a-1)(f-1)$
2	$\log_h f - \log_h g$	$(h-1)(f-g)$
2а	$\log_h f - 1$	$(h-1)(f-h)$
2б	$\log_h f$	$(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h - \log_g h$ $(g \neq 1, f \neq 1)$	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
4	$h^f - h^g$ $(h > 0)$	$(h-1)(f-g)$
4а	$h^f - 1$	$(h-1)f$
5	$f^h - g^h$ $(f > 0, g > 0)$	$(f-g)h$
6	$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$(f-g)(f+g)$

Отметим, что рассмотренный метод рационализации обобщается на произведение и частное любого числа типовых выражений.

Перечислим ряд *следствий* (с учетом области определения неравенства):

$$\log_h f \cdot \log_p g \vee 0 \Leftrightarrow (h-1)(f-1)(p-1)(g-1) \vee 0;$$

$$\log_h f + \log_h g \vee 0 \Leftrightarrow (fg-1)(h-1) \vee 0;$$

$$\sqrt{f} - \sqrt{g} \vee 0 \Leftrightarrow f - g \vee 0;$$

$$\frac{h^f - h^g}{h^p - h^q} \vee 0 \Leftrightarrow \frac{f-g}{p-q} \vee 0;$$

$$f^h - g^p \vee 0 \Leftrightarrow (a-1)(\log_a f^h - \log_a g^p) \vee 0.$$

В указанных равносильных переходах символ «$\vee$» заменяет один из знаков неравенств: «$>$», «$<$», «$\geq$», «$\leq$».

Докажем справедливость замен, представленных в таблице 4.1.

Доказательство. 1. Пусть $\log_a f - \log_a g > 0$, то есть

$$\log_a f > \log_a g, \tag{2}$$

причем $a > 0$, $a \neq 1$, $f > 0$, $g > 0$.

Если $0 < a < 1$, то по свойству убывающей логарифмической функции имеем $f < g$. Значит, выполняется система неравенств $\begin{cases} a-1<0, \\ f-g<0, \end{cases}$ откуда следует неравенство $(a-1)(f-g) > 0$, верное на области определения выражения $F = \log_a f - \log_a g$.

Если $a > 1$, то $f > g$. Следовательно, имеет место неравенство $(a-1)(f-g) > 0$.

Обратно, если выполняется неравенство $(a-1)(f-g) > 0$ на области (2), то оно на этой области равносильно совокупности двух систем неравенств: $\begin{cases} a-1<0, \\ f-g<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a-1>0, \\ f-g>0. \end{cases}$

Из каждой системы следует неравенство $\log_a f > \log_a g$, то есть $\log_a f - \log_a g > 0$. Аналогично рассматриваются неравенства вида $F < 0$, $F \geq 0$, $F \leq 0$.

2. Пусть некоторое число $a > 0$ и $a \neq 1$, тогда имеем:

$$\log_h f - \log_h g = \frac{\log_a f}{\log_a h} - \frac{\log_a g}{\log_a h} = \frac{\log_a f - \log_a g}{\log_a h}.$$

Знак последнего выражения совпадает со знаком выражения

$$\frac{(a-1)(f-g)}{(a-1)(h-1)} \text{ или } (h-1)(f-g).$$

3. Так как

$$\log_f h - \log_g h = \frac{\log_g h}{\log_g f} - \log_g h =$$

$$= \log_g h \cdot \log_f g - \log_g h = \log_g h\,(\log_f g - 1),$$

то, используя замены *2а* и *2б* (см. табл. 4.1), получаем, что знак последнего выражения совпадает со знаком выражения

$$(g-1)(h-1)(f-1)(g-f), \text{ или } (f-1)(g-1)(h-1)(g-f).$$

4. Из неравенства $h^f - h^g > 0$ следует $h^f > h^g$. Пусть число $a > 1$, тогда

$$\log_a h^f > \log_a h^g, \text{ или } (f-g)\log_a h > 0.$$

Отсюда с учетом замены 1*б* и условия $a > 1$ получаем:

$$(f-g)(a-1)(h-1) > 0,\ (h-1)(f-g) > 0.$$

Аналогично доказываются неравенства $F < 0$, $F \leq 0$, $F \geq 0$.

5. Доказательство проводится аналогично доказательству 4.

6. Доказательство замены *6* (см. табл. 4.1) следует из равносильности неравенств $|p| > |q|$ и $p^2 > q^2$ ($|p| < |q|$ и $p^2 < q^2$).

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \le 2.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) - \log_{|x+2|}(x + 2)^2 \le 0$$

и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации:

$$\begin{cases} (|x+2|-1)(4+7x-2x^2-(x+2)^2) \le 0, \\ 4+7x-2x^2 > 0, \\ x+2 \ne 0, \\ |x+2| \ne 1. \end{cases}$$

Знак множителя ($|x + 2| - 1$) совпадает со знаком ($(x + 2)^2 - 1$) по замене *6*.

Получим равносильную систему неравенств:

$$\begin{cases} ((x+2)^2-1)(-3x^2+3x) \le 0, \\ (x+0,5)(x-4) < 0, \\ x \ne -3,\ x \ne -2,\ x \ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x+3)(x-1) \ge 0, \\ (x+0,5)(x-4) < 0, \\ x \ne -3,\ x \ne -2,\ x \ne -1. \end{cases}$$

Окончательно получаем (рис. 4.3), что решением являются все x такие, что $-0,5 < x \le 0$, $1 \le x < 4$.

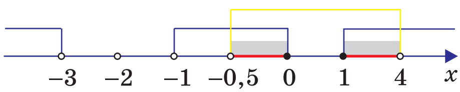

Рис. 4. 3

Ответ: (–0,5; 0] ∪ [1; 4).

Пример 7. Решить неравенство

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \ge \log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) - \log_{2x^2-5x+3}(3-x) \ge 0$$

и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации:

$$\begin{cases}\left(12x^2-41x+34\right)\left(2x^2-5x+2\right)(2-x)\left(-10x^2+36x-32\right)\ge 0,\\ 12x^2-41x+35>0,\\ 2x^2-5x+3>0,\\ 12x^2-41x+34\ne 0,\\ 2x^2-5x+2\ne 0,\\ 3-x>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^4\left(x-\dfrac{8}{5}\right)\left(x-\dfrac{17}{12}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\ge 0,\\ \left(x-\dfrac{5}{3}\right)\left(x-\dfrac{7}{4}\right)>0,\\ (x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)>0,\\ \left(x-\dfrac{17}{12}\right)(x-2)\ne 0,\\ (x-2)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\ne 0,\\ x<3.\end{cases}$$

Для решения первых трех неравенств системы используем метод интервалов.

Самостоятельно рассмотрите рисунки и выберите общую часть для решения системы.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{2};1\right)\cup\left[\dfrac{8}{5};\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7}{4};2\right)\cup(2;3)$.

Пример 8. Решить неравенство

$$\frac{9}{\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9}x}\ge\frac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\left(\log_{2,1}(x-10)^2\right)\log_{1,9}x}.$$

Решение. Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases}x-1>0,\\ x>0,\\ x\ne 1,\\ x\ne 10,\\ (x-10)^2\ne 1,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}x>1,\\ x\ne 10,\\ x\ne 11,\\ x\ne 9.\end{cases}$$

Учитывая, что при $x > 1$ выражение $\log_{1,9} x$ положительно, преобразуем данное неравенство на его области определения:

$$\frac{81-(x-1)^{\log_3(x-1)}}{\log_{2,1}(x-10)^2} \geq 0.$$

Далее используем метод рационализации (рис. 4.4):

$$\frac{\log_3 81-\log_3(x-1)^{\log_3(x-1)}}{(2,1-1)\left((x-10)^2-1\right)} \geq 0; \quad \frac{4-\log_3^2(x-1)}{(x-9)(x-11)} \geq 0;$$

$$\frac{\left(\log_3 9-\log_3(x-1)\right)\left(\log_3 9-\log_3(x-1)^{-1}\right)}{(x-9)(x-11)} \geq 0; \quad \frac{(9-x+1)\left(9-\dfrac{1}{x-1}\right)}{(x-9)(x-11)} \geq 0;$$

$$\frac{(x-10)(9x-10)}{(x-9)(x-11)(x-1)} \leq 0.$$

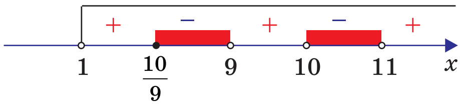

Рис. 4.4

Ответ: $\left[\dfrac{10}{9};\, 9\right) \cup (10;\, 11).$

Методические рекомендации. Приведем один из способов, с помощью которого учитель может самостоятельно составлять неравенства определенного типа. Для этого можно взять за основу неравенство вида $\dfrac{f(x)\cdot f_2(x)\cdot\, \ldots\, \cdot f_k(x)}{f_{k+1}(x)\cdot f_{k+2}(x)\cdot\, \ldots\, \cdot f_n(x)} \vee 0$, где $f_i(x)$ одно из типовых выражений (см. табл. 4.1). Например, $\dfrac{\log_{x+1}\left(x^2-1\right)\cdot\left(\log_{x^2} x-1\right)}{\left(2^{x+2}-2^{x^2}\right)\left(\log_{0,2}|x|-\log_{0,2}|x+3|\right)} \leq 0.$

Тренировочные упражнения

Решите неравенство (**4–14**).

4. $\dfrac{2\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)} \leq \dfrac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}.$

5. $\log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x \sqrt{6-x}\right) > 0.$

6. $\dfrac{\lg\left(3x+2\sqrt{x}-1\right)}{\lg\left(5x+3\sqrt{x}-2\right)^5} \geq \dfrac{\log_{32} 11}{\log_2 11}.$

7. $\dfrac{(x-0,5)(3-x)}{\log_2|x-1|} > 0.$

8. $\dfrac{\log_5\left(x^2-4x-11\right)^2-\log_{11}\left(x^2-4x-11\right)^3}{2-5x-3x^2} \geq 0.$

9. $\log_{1-x}(2x^2+3x+1)\ge 2.$

10. $\log_{x+4}(5x+20)\le\log_{x+4}(x+4)^2.$

11. $\log_{\frac{3x-1}{3x+1}}\left(x-\frac{1}{3}\right)\ge 1.$

12. $\dfrac{\log_{2x-1}\left(\log_2\left(x^2-2x\right)\right)}{\log_{2x-1}\left(x^2+6x+10\right)}\le 0.$

13. $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0.$

14. $\log_{4x}(x+7)\le\log_{x^2-5}(x+7).$

Использование ограниченности функций

Данный метод наиболее эффективен, если в неравенстве содержатся такие функции, как $y=\sqrt{x}$, $y=|x|$, $y=\sin x$ и другие, области значений которых ограничены сверху или снизу.

Для использования ограниченности функции необходимо уметь находить множество значений функции и знать оценки области значений стандартных функций (например, $-1\le\sin x\le 1$, $\sqrt{x}\ge 0$).

Метод оценки

Иногда неравенство $f(x)\vee g(x)$ устроено так, что на всей ОДЗ неизвестной имеют место неравенства $f(x)\ge A$ и $g(x)\le A$ при некотором A. В этом случае:

а) решение неравенства $f(x)\le g(x)$ сводится к нахождению тех значений x, для которых одновременно $f(x)=A$ и $g(x)=A$;

б) решение неравенства $f(x)\ge g(x)$ сводится к нахождению тех решений неравенства $f(x)\ge A$, для которых определена функция $g(x)$.

Пример 9. Решить неравенство $\log_5 x\le\sqrt{1-x^4}$.

Решение. Область определения неравенства задается условиями:

$$\begin{cases}x>0,\\1-x^4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\le 1.$$

Для всех x из полученного множества имеем $\log_5 x\le 0$, а $\sqrt{1-x^4}\ge 0$. Следовательно, решением этого неравенства является промежуток (0; 1].

Ответ: (0; 1].

Пример 10. Решить неравенство
$$\sqrt{16-(5x+2)^2} \ge 4+\cos^2\frac{15\pi x}{4}.$$
Решение. Оценим правую часть данного неравенства. Так как
$$0 \le \cos^2\frac{15\pi x}{4} \le 1,$$
то
$$4 \le 4+\cos^2\frac{15\pi x}{4} \le 5.$$
Для левой части последовательно имеем:
$$(5x+2)^2 \ge 0,\ -(5x+2)^2 \le 0,$$
$$16-(5x+2)^2 \le 16,\ \sqrt{16-(5x+2)^2} \le 4$$
при всех допустимых значениях x.

Исходное неравенство будет верно только в том случае, если обе части неравенства равны 4, то есть данное неравенство равносильно системе
$$\begin{cases} \sqrt{16-(5x+2)^2} = 4, \\ 4+\cos^2\dfrac{15\pi x}{4} = 4. \end{cases}$$
Первое уравнение системы имеет один корень $x = -0{,}4$, который удовлетворяет и второму уравнению.

Ответ: $-0{,}4$.

Пример 11. (*МИЭТ, 2005.*) Решить неравенство
$$\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x} > 3\cdot\sqrt[4]{x^2-4x+20}.$$
Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}$.

$D(f) = [-7;\ 11]$. Найдем экстремумы функции:
$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+7}}-\frac{1}{2\sqrt{11-x}}=\frac{\sqrt{11-x}-\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x+7}\sqrt{11-x}},$$
$D(f\,') = (-7;\ 11)$. Найдем нули производной. Из уравнения $11 - x =$ $= x + 7$ получаем $x = 2$.

- $f\,'(x) > 0$ при $-7 < x < 2$;
- $f\,'(x) < 0$ при $2 < x < 11$.

Следовательно, $x = 2$ — точка максимума функции $f(x)$, и $f(2) = 6$.

Значит $\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x} \le 6$ при всех допустимых значениях x.

Оценим правую часть исходного неравенства:
$$3\cdot\sqrt[4]{x^2-4x+20} = 3\cdot\sqrt[4]{(x-2)^2+16} \ge 3\cdot\sqrt[4]{16} = 6.$$

Таким образом, для исходного неравенства нужно, чтобы его левая и правая части были равны 6. Это выполняется при $x = 2$.

Ответ: 2.

Методические рекомендации. Используем квадратичную функцию для построения примеров, в решении которых применяется метод оценки. Так как квадратичные функции $ax^2 + bx$ и $-ax^2 - bx$ при одном и том же значении $x=-\dfrac{b}{2a}$ имеют разный характер экстремума, то в уравнениях вида

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=-ax^2-bx+d,$$

или

$$\log_a(ax^2 + bx + c) = -ax^2 - bx + d$$

достаточно подобрать значения c и d, при которых $x=-\dfrac{b}{2a}$ является их корнем. Далее заменяем знак равенства на знак неравенства «≥» или «≤». Приведем примеры таких неравенств, например:

$$\log_4(6x - x^2 + 7) \geq x^2 - 6x + 11,\ \sqrt{6x-x^2+7}\geq x^2-6x+13.$$

Неотрицательность функции

Пусть левая часть неравенства $f(x) \vee 0$ есть сумма нескольких функций: $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$, каждая из которых неотрицательна для любого x из области ее определения. Тогда неравенство $f(x)\leq 0$ равносильно системе уравнений $\begin{cases} f_1(x)=0,\\ f_2(x)=0,\\ \dots\dots\\ f_n(x)=0,\end{cases}$ а неравенство $f(x)\geq 0$ сводится к нахождению области определения функции $f(x)$.

Пример 12. Решить неравенство

$$\sqrt{x^3+8x^2-7x-26}+\sqrt{x^2+3x-10}\leq 0.$$

Решение. Так как левая часть неравенства неотрицательна, то данное неравенство выполняется только при одновременном равенстве нулю слагаемых:

$$\begin{cases}\sqrt{x^3+8x^2-7x-26}=0,\\ \sqrt{x^2+3x-10}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+8x^2-7x-26=0,\\ \left[\begin{array}{l} x=-5\\ x=2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Ответ: 2.

Методические рекомендации. Используя набор неотрицательных функций $\sqrt[2k]{f(x)}$, $|\,g(x)\,|$, $p^{2k}(x)$, $\log_a(1+q(x))$ при $q(x)\geq 0$, имеющих хотя бы один общий нуль, учитель легко может составить примеры. Например, используя схему неравенства

$$\sqrt[4]{(x-a)(x-b)}+|\,(x-b)(x-c)\,|\leq 0,$$

сначала получаем неравенство

$$\sqrt[4]{(x-2)(x-4)}+|\,(x-4)(x+3)\,|\leq 0,$$

после преобразований пример приобретает окончательный вид:

$$\sqrt[4]{x^2-6x+8}+\left|\,x^2-x-12\,\right|\leq 0.$$

Применение свойств модуля

В последние годы в различных математических изданиях уделяется повышенное внимание эффективным методам решения нестандартных задач. Одной из популярных тем является «Абсолютная величина». Как известно, при решении неравенств часто предварительно решают соответствующее уравнение. Поэтому при решении нестандартных уравнений с модулями используют не только основные, но и дополнительные свойства модуля числа, которые не отражены в учебниках.

Напомним *некоторые дополнительные свойства модулей*, доказательства которых легко проводятся перебором различных случаев раскрытия знаков модуля.

Сумма модулей равна алгебраической сумме подмодульных выражений тогда и только тогда, когда каждое выражение имеет тот знак, с которым оно входит в алгебраическую сумму:

$$|f|+|g|=f+g\Leftrightarrow\begin{cases}f\geq 0,\\ g\geq 0;\end{cases}$$

$$|f|+|g|=f-g\Leftrightarrow\begin{cases}f\geq 0,\\ g\leq 0;\end{cases}$$

$$|f|+|g|=-f+g\Leftrightarrow\begin{cases}f\leq 0,\\ g\geq 0;\end{cases}$$

$$|f|+|g|=-f-g\Leftrightarrow\begin{cases}f\leq 0,\\ g\leq 0.\end{cases}$$

Сумма модулей равна модулю алгебраической суммы подмодульных выражений тогда и только тогда, когда одновременно все выражения имеют тот знак, с которым они входят в алгебраическую сумму, либо одновременно все выражения имеют противоположный знак:

$$|f|+|g|=|f+g| \Leftrightarrow \begin{cases} f\ge 0, \\ g\ge 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} f\le 0, \\ g\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow fg\ge 0;$$

$$|f|+|g|=|f-g| \Leftrightarrow \begin{cases} f\ge 0, \\ g\le 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} f\le 0, \\ g\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow fg\le 0.$$

Одна из схем решения уравнения для трех слагаемых:

$$|f|+|g|+|h|=|f+g-h| \Leftrightarrow \begin{cases} f\ge 0, \\ g\ge 0, \\ h\le 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} f\le 0, \\ g\le 0, \\ h\ge 0. \end{cases}$$

Пример 13. Решить неравенство

$$|x^2-3x+2|\le x^2-3x+2.$$

Решение. Из условия $|a|\le a$ и из свойств модуля $|a|\ge a$ имеем $|a|=a$. Отсюда по определению модуля получаем $a\ge 0$, где $a=x^2-3x+2$. Неравенство $x^2-3x+2\ge 0$ имеет решения $(-\infty;\,1]\cup[2;\,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\,1]\cup[2;\,+\infty)$.

Пример 14. (*МИОО, 2010.*) Решить неравенство

$$|x^3-2x^2-3x|+|x^2+4x-5|\le|x^3-x^2+x-5|.$$

Решение. Неравенство имеет вид $|a|+|b|\le|a+b|$, где

$$a=x^3-2x^2-3x \text{ и } b=x^2+4x-5.$$

С другой стороны, известно неравенство треугольника:

$$|a|+|b|\ge|a+b|.$$

Отсюда получаем равенство

$$|a|+|b|=|a+b|,$$

которое справедливо при условии $ab\ge 0$.

Из неравенства

$$(x^3-2x^2-3x)(x^2+4x-5)\ge 0,$$

или

$$x(x+1)(x-3)(x-1)(x+5)\ge 0$$

получаем: $x\in[-5;\,-1]\cup[0;\,1]\cup[3;\,+\infty)$.

Ответ: $[-5;\,-1]\cup[0;\,1]\cup[3;\,+\infty)$.

Методические рекомендации. Неравенства с модулем легко составить по выше приведенным схемам: $|f(x)|\le f(x)$, $|f|+|g|=|f+g|$, $|f|+|g|=f+g$ и т.д. Например:

$$|x^3-1|+|1-\log_2 x|=x^3+\log_2 x;$$

$$|2^x-8|+|x^2-6x+8|=|2^x+x^2-6x|.$$

Ограниченность синуса и косинуса

Известные неравенства $|\sin \alpha x| \le 1$ и $|\cos \alpha x| \le 1$, связанные с ограниченностью синуса и косинуса, часто используют при решении нестандартных неравенств.

Пример 15. (*МИЭТ, 1998.*) Решить неравенство

$$(x^2 + 2x + 2) \cdot \cos(x + 1) \ge 2x^2 + 4x + 3.$$

Решение. Поскольку $x^2 + 2x + 2 > 0$ при любом x, то, разделив обе части неравенства на $x^2 + 2x + 2$, придем к равносильному неравенству:

$$\cos(x+1) \ge \frac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2} \Leftrightarrow \cos(x+1) \ge 1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1}.$$

Так как $\cos(x + 1) \le 1$, а правая часть неравенства $1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1} \ge 1$ при всех значениях x и $1+\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+1} = 1$ при $x = -1$, то равенство возможно только при $x = -1$. Проверкой убеждаемся, что и левая часть неравенства при $x = -1$ также равна 1.

Ответ: -1.

Пример 16. Решить неравенство $\cos 4x \cdot \sin x \ge 1$.

Решение. Так как $|\cos 4x| \le 1$ и $|\sin x| \le 1$, то $|\cos 4x| \cdot |\sin x| \le 1$ и исходное неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos 4x = 1, \\ \sin x = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \sin x = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x = 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \\ \begin{cases} 4x = \pi + 2\pi n, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{\pi n}{2}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \end{cases} \end{array}\right. \quad n, k \in \boldsymbol{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 17. Решить неравенство $\cos x + \cos 3x \ge 2$.

Решение. Из неравенств $|\cos x| \le 1$ и $|\cos 3x| \le 1$ следует, что неравенство возможно только в том случае, когда оба слагаемых одновременно будут равны 1:

$$\cos x + \cos 3x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, \\ x = \frac{2\pi k}{3}, \end{cases} \ n, k \in \boldsymbol{Z}.$$

Вторая серия решений включает первую серию, поэтому окончательно имеем: $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Методические рекомендации. Подобные примеры составляются с использованием следующих схем:

$$f(kx) \pm g(mx) \geq 2,\ f(kx) \pm g(mx) \leq -2,$$
$$f(kx) \cdot g(mx) \geq 1 \text{ или } f(kx) \cdot g(mx) \leq -1,$$

где f и g — функции синус или косинус, k и m — фиксированные целые числа. Например,

$$\cos 3x - \sin 4x \leq -2;\ \sin 2x \cdot \cos 5x \geq 1.$$

Применение классических неравенств

Рассмотрим классическое неравенство Коши, известное школьнику как неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел, которое эффективно может быть использовано при решении неравенств.

Неравенство Коши:

Для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n справедливо неравенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n},$$

причем равенство достигается только в случае $a_1 = a_2 = \ldots a_n$.

Пример 18. Решить неравенство $x^{1005} + \dfrac{2010}{\sqrt{x}} \leq 2011$.

Решение. Запишем левую часть данного неравенства следующим образом:

$$x^{1005} + \frac{2010}{\sqrt{x}} = x^{1005} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x}}}_{2010 \text{ слагаемых}}.$$

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получим:

$$x^{1005} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2011 \cdot \sqrt[2011]{x^{1005} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2011 \cdot \sqrt[2011]{1} = 2011.$$

Причем равенство имеет место при равенстве слагаемых, то есть при $x^{1005} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$.

Следовательно, исходное неравенство выполняется только при $x = 1$. При всех остальных допустимых значениях x левая часть исходного неравенства больше 2011.

Ответ: 1.

Методические рекомендации. При составлении примеров за основу можно взять неравенство вида $f(x)+\dfrac{1}{f(x)} \vee 2-T^2(x)$ или $f(x)+\dfrac{1}{f(x)} \vee 1+T(x)$, где $f(x) > 0$, $T(x)$ — одна из функций $\sin \alpha x$ или $\cos \alpha x$. Например,

$$(\log_3 4)^x + (\log_4 3)^x \le 2 - \sin^2 5x,\quad \left(\frac{4}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{5}{4}\right)^{x-1} \le 1+\cos 7x.$$

Тренировочные упражнения

Решите неравенство **(15–22)**.

15. $\sqrt{x-1}+2^{\arcsin\frac{1}{x}} > 1.$

16. $\arcsin (x^2 + 1) < 2.$

17. $5^{\log_x 2} \cdot \log_2 x + 5^{\log_2 x} \cdot \log_x 2 \le 10.$

18. $\sin^2 3x - \cos^2 3x \le -1.$

19. $\sqrt{\cos x - 1} \ge x^2 - 16.$

20. $\left(10x - x^2 - 24\right) \cdot \log_2\left(\sin^2 \dfrac{\pi}{2} x + 1\right) \ge 1.$

21. $|\, x^3 + 2x^2 + 8x - 7 \,| \le x^3 + 4x^2 - 8x + 7.$

22. $|\, x^3 + 2x^2 - 8x \,| + |\, x^2 - 3x - 10 \,| \le |\, x^3 + 3x^2 - 11x - 10 \,|.$

Использование монотонности функций

При использовании монотонности функций различают случаи, когда функции, стоящие в обеих частях неравенства, имеют одинаковую монотонность или разную монотонность.

Монотонность функции на множестве *R*

Приведем несколько утверждений, позволяющих решать неравенства данного вида, где $f(t)$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Если функция $f(t)$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.

Если функция $f(t)$ строго убывает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно неравенству $h(x) < g(x)$.

Отметим следствия из этих утверждений, которые часто используют при решении неравенств.

Следствие 1. Так как функция $y = t^{2n+1}$, $n \in \boldsymbol{N}$, строго возрастает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $(h(x))^{2n+1} > (g(x))^{2n+1}$ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.

Следствие 2. Так как функция $y = \sqrt[2n+1]{t}$, $n \in \boldsymbol{N}$, строго возрастает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $\sqrt[2n+1]{h(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)}$ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.

Следствие 3. Так как функция $y = a^t$ $(a > 1)$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $a^{h(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.

Следствие 4. Так как функция $y = a^t$ $(0 < a < 1)$ строго убывает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $a^{h(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $h(x) < g(x)$.

Следствие 5. Так как функция $y = \operatorname{arctg} t$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $\operatorname{arctg} h(x) > \operatorname{arctg} g(x)$ равносильно неравенству $h(x) > g(x)$.

Следствие 6. Так как функция $y = \operatorname{arcctg} t$ строго убывает на $\boldsymbol{R}$, то неравенство $\operatorname{arcctg} h(x) > \operatorname{arcctg} g(x)$ равносильно неравенству $h(x) < g(x)$.

Пример 19. Решить неравенство $(2x^2 + 1)^5 - (3x)^5 > 3x - 2x^2 - 1$.

Решение. Перепишем данное неравенство в виде

$$(2x^2 + 1)^5 + 2x^2 + 1 > (3x)^5 + 3x. \tag{3}$$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^5 + t$, определенную при всех действительных значениях t.

Тогда неравенство (3) примет вид $f(2x^2 + 1) > f(3x)$.

Так как $f'(t) = 5t^4 + 1 > 0$ для любого $t \in \boldsymbol{R}$, то функция $f(t)$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$. Для возрастающей функции, определенной на всей числовой прямой, неравенство $f(t_1) > f(t_2)$ равносильно неравенству $t_1 > t_2$.

Следовательно, неравенство (3) равносильно неравенству $2x^2 + 1 > 3x$, решением которого являются $x < 0{,}5$ или $x > 1$.

Ответ: $(-\infty; 0{,}5) \cup (1; +\infty)$.

Пример 20. (*МИЭТ, 2005.*). Решить неравенство

$$\left(1 - |\,x\,|\right) \cdot \sqrt{1 + 3x^2} \le x \cdot \sqrt{4 + 3x^2 - 6x}.$$

Решение. Поскольку $4 + 3x^2 - 6x = 1 + 3(1 - x)^2$, $x = 1 - (1 - x)$, то данное неравенство можно рассматривать как сравнение значений функции $f(t) = (1 - t)\sqrt{1 + 3t^2}$, определенной на всей числовой прямой при значениях $t_1 = |\,x\,|$ и $t_2 = 1 - x$, то есть, как неравенство значений $f(|\,x\,|) \le f(1 - x)$.

Выясним характер монотонности функции $f(t)$. Для этого найдем ее производную:

$$f'(t) = -1 \cdot \sqrt{1 + 3t^2} + (1 - t) \cdot \frac{6t}{2\sqrt{1 + 3t^2}} = -\sqrt{1 + 3t^2} - \frac{3t(t - 1)}{\sqrt{1 + 3t^2}} = \frac{-6t^2 + 3t - 1}{\sqrt{1 + 3t^2}}.$$

Заметим, что многочлен $-6t^2 + 3t - 1$ не имеет корней и его старший коэффициент меньше нуля. Значит, при всех t выражение $-6t^2 + 3t - 1 < 0$, соответственно, $f'(t) < 0$ на $\boldsymbol{R}$. Это означает, что функция $f(t)$ — убывающая. Для убывающей функции, определенной на всей числовой прямой, неравенство $f(t_1) \le f(t_2)$ равносильно неравенству $t_1 \ge t_2$. Следовательно,

$$f(|x|) \le f(1-x) \Leftrightarrow |x| \ge 1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1-x \\ x \le x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}.$$

Ответ: $x \ge \frac{1}{2}$.

Методические рекомендации. Стандартные примеры по данному разделу учитель найдет в учебниках или задачниках. Приведем пример построения нестандартного по виду неравенства. Квадратное неравенство $x^2 - 5x + 6 \ge 0$ приведем, например, к виду $x^2 - 3x \ge$ $\ge 2x - 6$. Рассмотрим возрастающую функцию $f(t) = \sqrt[3]{t} + 2^t$ на $\boldsymbol{R}$ как сумму двух возрастающих функций и запишем неравенство $f(x^2 - 3x) \ge f(2x - 6)$. Развернутая запись последнего неравенства имеет следующий вид:

$$\sqrt[3]{x^3 - 3x} + 2^{x^3 - 3x} \ge \sqrt[3]{2x - 6} + 2^{2x-6}.$$

Монотонность функции на промежутке

Приведем несколько утверждений, позволяющих решать неравенства вида $f(h(x)) \vee f(g(x))$, где $f(t)$ строго возрастает на промежутке.

Если функция $f(t)$ определена и является возрастающей на промежутке M, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) > g(x), \\ E(h) \subset M, \\ E(g) \subset M, \end{cases}$$

где $E(h)$ и $E(g)$ — множество значений функций $h(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Если функция $f(t)$ определена и строго убывает на промежутке M, то неравенство $f(h(x)) > f(g(x))$ равносильно системе

$$\begin{cases} h(x) < g(x), \\ E(h) \subset M, \\ E(g) \subset M, \end{cases}$$

где $E(h)$ и $E(g)$ — множество значений функций $h(x)$ и $g(x)$ соответственно.

Следствие 1. Неравенство вида $\log_a h(x) > \log_a g(x)$, где $a > 1$, равносильно неравенствам $h(x) > g(x) > 0$.

Следствие 2. Неравенство вида $\log_a h(x) > \log_a g(x)$, где $0 < a < 1$, равносильно неравенствам $0 < h(x) < g(x)$.

Следствие 3. Неравенство вида $\arcsin h(x) > \arcsin g(x)$ равносильно неравенствам $1 \geq h(x) > g(x) \geq -1$.

Следствие 4. Неравенство вида $\arccos h(x) > \arccos g(x)$ равносильно неравенствам $-1 \leq h(x) < g(x) \leq 1$.

Пример 21. Решить неравенство $\log_3 (x^3 + x^2 - 4x + 2) \geq \log_3 (x^3 - 1)$.

Решение. Так как функция $y = \log_3 t$ строго возрастает на множестве $t > 0$, то данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x^3 + x^2 - 4x + 2 \geq x^3 - 1, \\ x^3 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geq 0, \\ x^3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 3, \end{array}\right. \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 3.$$

Ответ: $[3; +\infty)$.

Пример 22. Решить неравенство $\arcsin (3x^2 - 2x) \leq \arcsin (3x + 2)$.

Решение. Функция $y = \arcsin t$ определена при $-1 \leq t \leq 1$ и возрастает на всей области определения. Используя свойства этой функции, перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x \leq 3x + 2, \\ -1 \leq 3x^2 - 2x, \\ 3x + 2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 \leq 0, \\ 3x^2 - 2x + 1 \geq 0, \\ x \leq -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{3} \leq x \leq 2, \\ x \leq -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{3}$.

Пример 23. Решить неравенство $\log_{84-2x-2x^2} \cos x \leq \log_{x+19} \cos x$.

Решение. Из условий $\begin{cases} 84 - 2x - 2x^2 > 0, \\ 84 - 2x - 2x^2 \neq 1, \\ x + 19 > 0, \\ x + 19 \neq 1, \\ 0 < \cos x \leq 1 \end{cases}$ получаем:

$$x \in \left(-7; -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 6\right), \quad x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{167}}{2}. \qquad (4)$$

Так как по условию $0 < \cos x \le 1$, то рассмотрим два случая.

1. Пусть $\cos x = 1$, тогда из множества чисел $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, с учетом (4) решениями данного в условии неравенства являются два числа: -2π и 0.

2. Для случая $0 < \cos x < 1$ исследуем функцию $y = \log_t a$, где $t > 0$, $t \ne 1$ и число $0 < a < 1$. Так как

$$y' = (\log_t a)' = \left(\frac{\ln a}{\ln t}\right)' = -\frac{\ln a}{t \ln^2 t} > 0,$$

то функция $y = \log_t a$ возрастает на каждом из промежутков $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$.

а) Для функции $y = \log_t a$, возрастающей на промежутке $(0; 1)$, получаем:

$$\begin{cases} 0 < 84 - 2x - 2x^2 < 1, \\ 0 < x + 19 < 1, \\ 84 - 2x - 2x^2 \le x + 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 < x < 6, \\ 84 - 2x - 2x^2 < 1, \\ -19 < x < 18, \\ 84 - 2x - 2x^2 \le x + 19 \end{cases}$$

— нет решений.

б) Для функции $y = \log_t a$, возрастающей на промежутке $(1; +\infty)$, получаем:

$$\begin{cases} 84 - 2x - 2x^2 > 1, \\ x + 19 > 1, \\ 84 - 2x - 2x^2 \le x + 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2x - 83 < 0, \\ x > -18, \\ 2x^2 + 3x - 65 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-1-\sqrt{167}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{167}}{2}, \\ x > -18, \\ \left[\begin{array}{l} x \le -6,5 \\ x \ge 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-1-\sqrt{167}}{2} < x \le -\dfrac{13}{2} \\ 5 \le x < \dfrac{-1+\sqrt{167}}{2}. \end{array}\right.$$

Полученные решения удовлетворяют условию (4).

Ответ: $\left(\dfrac{-1-\sqrt{167}}{2}; -\dfrac{13}{2}\right] \cup \{-2\pi; 0\} \cup \left[5; \dfrac{-1+\sqrt{167}}{2}\right).$

Функции разной монотонности

Пусть на промежутке $(a; b)$ заданы возрастающая функция $f(x)$ и убывающая функция $g(x)$, причем x_0 — корень уравнения $f(x) = g(x)$, принадлежащий промежутку $(a; b)$. Тогда решение неравенства

$f(x) > g(x)$ — все числа из промежутка $(x_0; b)$, а решение неравенства $f(x) < g(x)$ — промежуток $(a; x_0)$ (рис. 4.5).

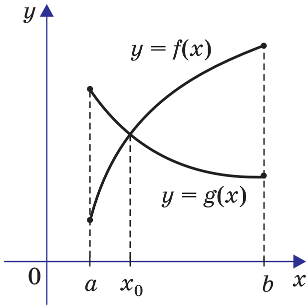

Рис. 4.5

Пусть на промежутке $(a; b)$ задана возрастающая функция $f(x)$ и x_0 — корень уравнения $f(x) = c$, принадлежащий промежутку $(a; b)$. Тогда решение неравенства $f(x) > c$ — все числа из промежутка $(x_0; b)$, а решение неравенства $f(x) < c$ — промежуток $(a; x_0)$ (рис. 4.6).

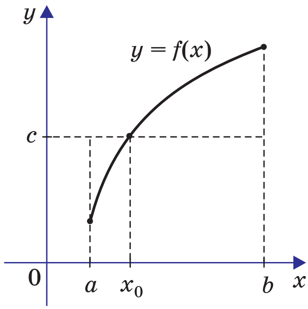

Рис. 4.6

Пример 24. Решить неравенство:

а) $2x^5 + x^3 + 5x - 80 > \sqrt[3]{14 - 3x}$;

б) $2x^5 + x^3 + 5x - 80 < \sqrt[3]{14 - 3x}$.

Решение. Рассмотрим функции

$$f(x) = 2x^5 + x^3 + 5x - 80 \text{ и } g(x) = \sqrt[3]{14 - 3x}.$$

Функция $f(x)$ определена и дифференцируема на $\boldsymbol{R}$. Исследуем ее на монотонность. Так как $f'(x) = 10x^4 + 3x^2 + 5 > 0$, как сумма двух неотрицательных и одного положительного слагаемых, то функция $f(x)$ строго возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Функция $g(x)$ определена на $\boldsymbol{R}$ и дифференцируема на множестве $\left(-\infty;\ \frac{14}{3}\right) \cup \left(\frac{14}{3};\ +\infty\right)$, причем $g'(x) = \frac{-1}{\sqrt[3]{(14-3x)^2}} < 0$.

Значит, функция $g(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$.

Поскольку функция $f(x)$ строго возрастает, а функция $g(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не больше одного корня. Подбором находим, что $x = 2$ является корнем этого уравнения.

Значит, решения неравенства «а» есть промежуток $(2;\ +\infty)$, а неравенства «б» — промежуток $(-\infty;\ 2)$.

Ответ: а) $(2;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ 2)$.

Пример 25. Решить неравенство

$$\sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x} < 4.$$

Решение. Область определения данного неравенства есть промежуток $[0;\ 1]$. Функция $y = \sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x}$ возрастает на этом промежутке как сумма возрастающих функций. Так как $f(1) = 4$, то все значения x из множества $[0;\ 1)$ удовлетворяют исходному неравенству.

Ответ: $[0;\ 1)$.

Методические рекомендации. Комбинируя, например, убывающую функцию $y = kx + b$ с возрастающими функциями, учитель может создать набор уравнений, имеющих один корень в силу разной монотонности функций:

$$\log_3 x = 20 - x,\ \sqrt{x+3} = 9 - x,\ -\frac{5}{x} = 4 - x,\ 3^{x-1} = 12 - x.$$

Далее заменяем знак равенства на знак неравенства.

Тренировочные упражнения

Решите неравенство **(23–27)**.

23. $\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} + \sqrt{x+24} < 11.$

24. $\log_3 (x + 2) < 9 - x.$

25. $$\sqrt[2011]{x^5 - x^2 + 1} + \operatorname{arctg}\left(x^5 - x^2 + 1\right) > \sqrt[2011]{x^5 - 2x - 2} + \operatorname{arctg}\left(x^5 - 2x - 2\right).$$

26. $(2x+1)^2\sqrt{1+\sqrt{1+(2x+1)^2}} < x^2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}.$

27. (*МГУ, 1999.*) $\log_{\frac{x}{2}+5} \sin x \geq \log_{9+8x-x^2} \sin x.$

Графический метод

Этот метод решения неравенств обладает несколькими несомненными преимуществами:

а) Построив графики функций, входящих в неравенство, можно определить, как влияет на решение взаимное расположение графиков.

б) График подчас позволяет аналитически сформулировать необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи, то есть графические приемы эффективно применяются для изображения результатов исследования там, где чисто аналитическая запись громоздка.

в) Ряд утверждений позволяет на основании графической информации делать вполне строгие и обоснованные заключения о решениях неравенства.

Пример 26. На рисунке 4.7 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке $[-3; 6]$. Решить неравенство $f(x) > g(x)$.

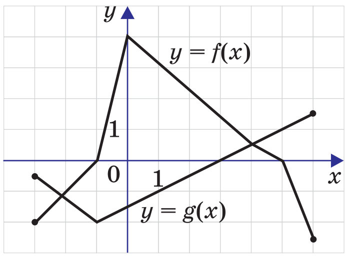

Рис. 4. 7

Решение. Графики данных функций пересекаются в двух точках с абсциссами -2 и 4 соответственно. График функции $y = f(x)$ расположен выше графика функции $y = g(x)$ при всех значениях $x \in (-2; 4)$.

Ответ: $(-2; 4)$.

Пример 27. (*МФТИ, 2009.*) Решить неравенство

$$\log_{|x|}\left(\sqrt{x+5}+4\right) \geq 2\log_{x^2}(2x+8).$$

Решение. Область определения данного неравенства определяется условиями $x \neq 0$, $|x| \neq 1$, $x \geq -5$, $x > -4$ и представляет собой промежуток $(-4; +\infty)$ с выброшенными из него точками -1, 0, 1.

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $|x| > 1$. В этом случае исходное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{|x|}\left(\sqrt{x+5}+4\right) \geq \log_{|x|}(2x+8),$$

которое равносильно неравенству

$$\sqrt{x+5} \geq 2x+4. \qquad (5)$$

Построим графики функций $y=\sqrt{x+5}$ и $y = 2x + 4$ (рис. 4.8).

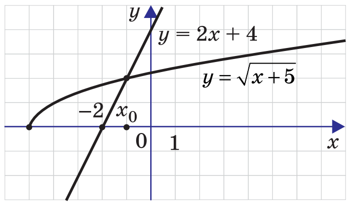

Рис. 4.8

Из рисунка 4.8 видно, что последнему неравенству удовлетворяют все значения $x \in [-5; x_0]$, где x_0 — корень уравнения $x + 5 = (2x + 4)^2$ такой, что $-2 < x_0 < 0$. Уравнение $4x^2 + 15x + 11 = 0$ имеет корни -1 и $-\frac{11}{4}$, поэтому $x_0 = -1$. Отсюда с учетом области определения неравенства при условии $|x| > 1$ находим множество решений неравенства (5): $-4 < x < -1$.

2. Пусть $0 < |x| < 1$. Тогда исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{x+5} \leq 2x+4$.

Откуда (см. рис. 4.8) следует $x \geq -1$. С учетом области определения неравенства при условии $0 < |x| < 1$ находим множество решений неравенства, которое является объединением интервалов $(-1; 0)$ и $(0; 1)$.

Ответ: $-4 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$.

Методические рекомендации. Покажем один из способов составления неравенств, решение которых основано на использовании графика. Рассмотрим, например, неравенство с модулем вида $|ax + b| + |kx + m| - A \leq 0$, где a, b, k, m, A — некоторые числа. Графиком функции $y = |ax + b| + |kx + m| - A$ является ломаная, состоящая из частей прямых, которую легко построить.

Тренировочные упражнения

Решите неравенство **(28–30)**.

28. $\log_2 x < \sqrt{3-x}$.
29. $|x-1|+|x+1|-2 \le 0$.

30. $\log_{x+2}\left(\sqrt{x+3}+1\right) \le 1$.

Ответы к тренировочным упражнениям

1. 1. **2.** $-1 < x < 1$. **3.** $0 < x < 1$. **4.** $(-7; -6)$, $[-3; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 4]$. **5.** $(2; 5)$. **6.** $\left[\frac{1}{4}; \frac{39-3\sqrt{69}}{50}\right)$. **7.** $(0; 0{,}5) \cup (2; 3)$. **8.** $x < -2$, $-2 < x < 2-\sqrt{15}$, $x \ge 6$. **9.** $(-\infty; -5]$. **10.** $(-4; -3) \cup [1; +\infty)$. **11.** $\frac{1}{3} < x \le \frac{2}{3}$. **12.** $\sqrt{2}+1 < x \le 1+\sqrt{3}$. **13.** $(-2; -1] \cup (1; 2)$. **14.** $\left(\sqrt{6}; 5\right]$. **15.** $[1; +\infty)$. **16.** 0. **17.** $0 < x < 1$, $x = 2$. **18.** $\frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **19.** 0. **20.** 5. **21.** $[-3; 1]$, $[7; +\infty)$. **22.** $[-4; -2] \cup [0; 2] \cup [5; +\infty)$. **23.** $[0; 1)$. **24.** $(-2; 7)$. **25.** $(-1; 3)$. **26.** $\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$. **27.** $\left[8; 4+2\sqrt{6}\right) \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{2}\right\}$. **28.** $(0; 2)$. **29.** $[-1; 1]$. **30.** $(-2; -1) \cup [1; +\infty)$.

Литература

1. *Дорофеев Г.В.* Обобщение метода интервалов // Математика в школе, 1969, № 3.

2. Математика. Алгебра. Начала математического анализа. Профильный уровень: учебник для 10 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2007.

3. *Панферов В.С., Сергеев И.Н.* ЕГЭ-2010. Математика. Задача С3 / под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2010.

4. *Потапов М.К., Шевкин А.В., Вуколова Т.М.* О решении неравенств вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$ // Математика в школе, 2005, № 5.

Содержание

Лекция 1
Арифметический и алгебраический способы
отбора корней в тригонометрических уравнениях 4

Лекция 2
Геометрический и функционально-графический
способы отбора корней в тригонометрических уравнениях 29

Лекция 3
Решение неравенств алгебраическими методами 50

Лекция 4
Решение неравенств функционально-графическими методами 75