Дальневосточный государственный университет
Факультет математики и компьютерных наук

Г.К. Пак

Биссектриса

Серия: Готовимся к математической олимпиаде

Владивосток
2003

ББК 22.1
П13
УДК 511.512.517

Г.К. Пак

П13 Биссектриса. Серия: Готовимся к математической олимпиаде. Учебное пособие. Владивосток. Изд-во Дальневосточного университета, 2003, 28 с.

Рассматриваются наиболее важные факты о биссектрисе треугольника, приведено большое количество примеров, иллюстрирующих методы решения геометрических задач с участием биссектрисы.

Учебное пособие предназначено для старшеклассников, слушателей подготовительных курсов и учителей.

Предисловие

К числу основных геометрических фактов следует отнести теорему о том, что биссектриса делит противолежащую сторону в отношении прилежащих сторон. Этот факт остался в тени у более известных теорем и в первую очередь потому, что в большинстве учебников он находится в ряду задач. Но повсеместно встречаются задачи, которые гораздо легче решить, если знать этот и другие факты о биссектрисе.

Условимся о следующих обозначениях:

a, b и *c* - стороны треугольника *ABC*;

α, β, γ - углы *BAC, ABC* и *ACB*;

h_a, h_b, h_c - высоты треугольника *ABC*;

l_a, l_b, l_c - биссектрисы углов *BAC, ABC* и *ACB*;

m_a, m_b, m_c - медианы, проведенные к сторонам *BC, AC* и *AB*;

L_1, L_2, L_3 - точки пересечения биссектрис l_a, l_b, l_c соответственно со сторонами *BC, AC* и *AB*;

O - центр окружности, описанной около треугольника *ABC*;

I - центр вписанной в треугольник окружности;

$p = \frac{a+b+c}{2}$;

Приведем несколько полезных формул с участием биссектрис, доказательство которых можно считать полезными упражнениями:

1) $l_a = \frac{b\,c\sin\alpha}{a\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$; 2) $\frac{a+c}{b+c} = \frac{l_a \sin\frac{\alpha}{2}}{l_b \sin\frac{\beta}{2}}$;

3) $l_a = \sqrt{\frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}}$; 4) $l_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$

5) $l_a = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$; 6) $l_a = \frac{a\,h_a}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}$

1. Третье геометрическое место точек

Понятие геометрического места точек вводится не во всех учебниках. Между тем при решении многих задач весьма полезным оказывается метод геометрических мест.

Фигура *F* является геометрическим местом точек (множеством точек), обладающих некоторым свойством *A*, если выполняются два условия:

1) из того, что точка принадлежит фигуре *F*, следует, что она обладает свойством *A*;

2) из того, что точка удовлетворяет свойству *A*, следует, что она принадлежит фигуре *F*.

Первое геометрическое место точек, рассматриваемое в геометрии - это окружность, т.е. геометрическое место точек, равноудаленных от одной фиксированной точки. Второе - серединный перпендикуляр отрезка, т.е. геометрическое место точек, равноудаленных от конца отрезка. И, наконец, третье - биссектриса - геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

Теорема 1. *Точки биссектрисы одинаково удалены от сторон угла.*

Доказательство:

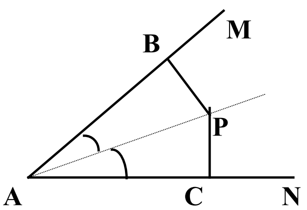


Рис. 1

Пусть *P* - точка биссектрисы угла *A*. Опустим из точки *P* перпендикуляры *PB* и *PC* на стороны угла (см. рис. 1). Тогда $\Delta\ BAP = \Delta\ CAP$ по гипотенузе и острому углу. Отсюда, $PB = PC$.

Теорема 2. *Если точка P одинаково удалена от сторон угла A, то она лежит на биссектрисе.*

Доказательство: $PB = PC \Rightarrow \Delta\ BAP = \Delta\ CAP \Rightarrow \angle BAP = \angle CAP \Rightarrow AP$ – биссектриса (см. рис. 1).

Задача. Построить окружность, касательную к данной прямой в данной точке и к другой данной прямой.

Решение. Даны: прямые a и b и точка P на прямой a. Центр O искомой окружности лежит на перпендикуляре, возведенном в точке P к прямой a. А так как точка O равноудалена от прямых a и b, то она лежит и на биссектрисе угла, образованного этими прямыми. Таким образом, биссектрисы двух смежных углов при пересечении с перпендикуляром дают центры двух окружностей, удовлетворяющих условиям задачи.

2. Основное свойство биссектрисы угла треугольника

Теорема. *Биссектриса делит противолежащую сторону треугольника в отношении прилежащих сторон.*

Доказательство 1:

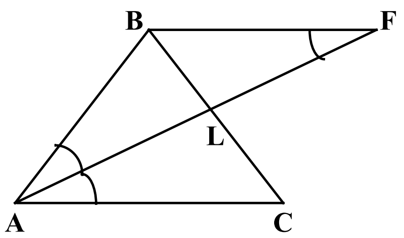


Рис.2

Дано AL - биссектриса треугольника ABC. Требуется доказать, что $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$.

Пусть F - точка пересечения прямой AL и прямой, проходящей через точку B параллельно стороне AC.

Тогда $\angle BFA = \angle FAC = \angle BAF$. Следовательно, треугольник BAF равнобедренный и $AB = BF$. Из подобия треугольников ALC и FLB имеем соотношение $\frac{BL}{LC} = \frac{BF}{AC}$, откуда $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$.

Доказательство 2:

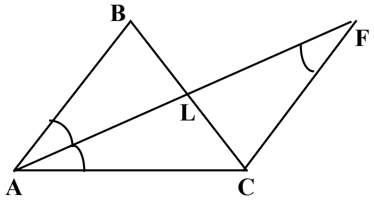


Рис.3

Пусть F - точка пересечения прямой AL и прямой, проходящей через точку C параллельно основанию AB (см. рис.3). Тогда можно повторить рассуждения.

Доказательство 3 :

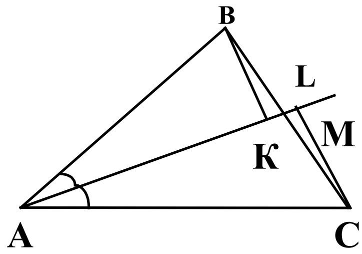


Рис. 4

Пусть K и M - основания перпендикуляров, опущенных на прямую AL из точек B и C соответственно (см. рис. 4).

Треугольники ABL и ACL подобны по двум углам. Поэтому $\frac{AB}{AC}=\frac{BK}{CM}$.

А из подобия треугольников BKL и CML имеем $\frac{BK}{CM}=\frac{BL}{CL}$. Отсюда $\frac{BL}{CL}=\frac{AB}{AC}$.

Доказательство 4:

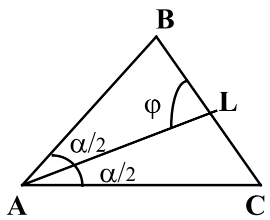


Рис. 5

Пусть $\alpha =\angle BAC$, $\varphi =\angle BLA$. По теореме синусов в треугольнике ABL $\frac{BL}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{AB}{\sin\varphi}$, а в треугольнике ACL $\frac{LC}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{AC}{\sin(180^0-\varphi)}$. Так как $\sin(180^0-\varphi)=\sin\varphi$, то, поделив обе части одного равенства на соответствующие части другого, получим $\frac{BL}{CL}=\frac{AB}{AC}$.

Доказательство 5: Применим метод площадей. Вычислим площади треугольников ABL и ACL двумя способами.

$$S_{ABL}=\frac{1}{2}AB\cdot AL\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}BL\cdot AL\cdot\sin\varphi;$$

$$S_{ACL} = \frac{1}{2} AC \cdot AL \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} LC \cdot AL \cdot \sin(180^0 - \varphi) .$$

Отсюда $$\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC} .$$

Задача. Построить треугольник по двум сторонам a и b и биссектрисе l угла между ними.

Решение. По трем сторонам $CC_1 = l$, $C_1M = CM = \frac{ab}{a+b}$ построим $\Delta\, CC_1M$. На стороне CM угла CMC_1 отложим отрезок $CB = a$, а на другой стороне угла отрезок $CA = b$. Треугольник ABC искомый.

3. Точка пересечения биссектрис треугольника

Теорема: *Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.*

Доказательство:

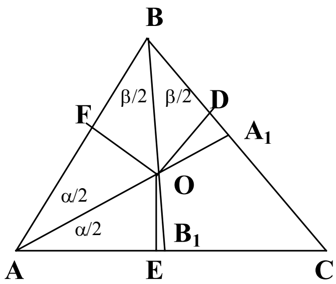


Рис. 6

Пусть O - точка пересечения биссектрис AA_1 и BB_1; D, E и F – основания перпендикуляров, опущенных из точки P на AB, BC и AC соответственно. *Треугольники AOE* и AOF равны по гипотенузе и острому углу, отсюда $OE = OF$.

Аналогично, из равенства треугольников BOF и BOD, получим $OF = OD$.

Следовательно, $OE = OD$, а значит, равны по гипотенузе и катету и треугольники OCD и OCE. Откуда следует, что $\angle OCD = \angle OCE$, т.е. CO - биссектриса угла DCE, а это означает, что третья биссектриса проходит через точку пересечения двух первых.

Замечание. Из приведенного доказательства следует, что точка пересечения биссектрис одинаково удалена от всех трех сторон треугольника, т. е. является центром вписанной окружности. Окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон называется *вневписанной.* Точно такими же рассуждениями можно доказать, что точка пересечения биссектрисы внутреннего угла треугольника и биссектрис двух внешних углов - центр вневписанной окружности.

Теорема. *Каждая биссектриса делится точкой пересечения биссектрис в отношении суммы прилежащих сторон к противолежащей, считая от вершины.*

Доказательство:

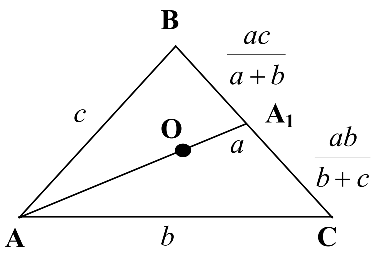


Рис. 7

Пусть O - точка пересечения биссектрис.

$AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Тогда $\begin{cases} BA_1 + A_1C = a, \\ \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{c}{b}. \end{cases}$

Откуда $BA_1 = \dfrac{ac}{a+b}$, $A_1C = \dfrac{ab}{b+c}$.

Так как BO - биссектриса внутреннего угла треугольника ABA_1, то $\dfrac{AO}{OA_1} = \dfrac{c}{\frac{ac}{a+b}} = \dfrac{a+b}{c}$.

Теорема. *Пусть O - точка пересечения биссектрис треугольника ABC,* $\angle ABC=\beta$. *Тогда* $\angle AOC=90^0+\beta/2$.

Доказательство:

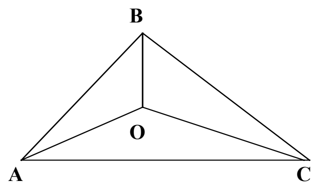


Рис. 8

$\alpha+\beta+\gamma = 180^0$.

$\angle AOC = 180^0 - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma =$

$= 180^0 - \frac{1}{2}(180^0 - \beta) = 90^0 + \frac{1}{2}\beta$.

Задача. *Постройте биссектрису угла, вершина которой находится за пределами листа.*

Решение. Пусть A - вершина угла, M и N - точки пересечения сторон угла с какой-либо прямой. Точка пересечения P биссектрис углов AMN и ANM лежит на искомой биссектрисе. Аналогично строится вторая точка биссектрисы. Двух точек достаточно для того, чтобы провести биссектрису.

4. Вычисление длины биссектрисы

Теорема. *Если a, b - стороны треугольника, γ - угол между ними, l_c - биссектриса этого угла. Тогда* $l_c = \dfrac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$.

Доказательство:

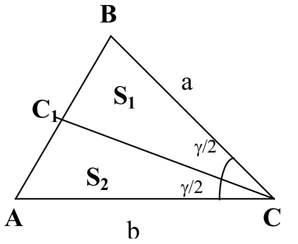


Рис. 9

Пусть S, S_1 и S_2 - площади треугольников ABC, CAC_1 и CBC_1 соответственно, $l_c = l$.

Тогда $S = S_1 + S_2$, откуда

$$\frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}al\sin\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2}bl\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$2ab\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} = l\sin\frac{\gamma}{2}(a+b),$$

$$2ab\cos\frac{\gamma}{2} = l(a+b);\quad l_c = \frac{2ab\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}.$$

Теорема. *Пусть a, b, c - стороны треугольника, l_a - биссектриса к стороне a. Тогда* $l_a^2 = bc - \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2}$.

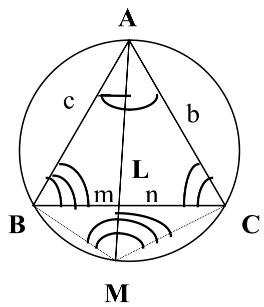


Рис. 10

Доказательство:

Пусть *m=BL*, *n=LC*, *k=LM*. Тогда $m\cdot n = l_a\cdot k,\ m = \dfrac{ac}{b+c},\quad n = \dfrac{ab}{b+c}$.

Из подобия треугольников *ABL* и *AMC* имеем $\dfrac{l_a}{c} = \dfrac{b}{l_a + k}$, т.е. $l_a^2 = bc - l_a\cdot k$.

Отсюда $l_a^2 = bc - mn$, $l_a^2 = bc - \dfrac{a^2bc}{(b+c)^2}$.

Теорема Стюарта.

$$l_a^2 = \frac{b^2 a_1 + c^2 a_2}{a_1 + a_2} - a_1 a_2,$$

где $a_1 = BA_1$, $a_2 = A_1C$, $l_a = AA_1$.

Доказательство. $l_a^2 = bc - a_1 a_2 = \frac{abc}{a} - a_1 a_2 = \frac{\frac{abc(b+c)}{b+c}}{a} - a_1 a_2 = \frac{b^2 a_1 + c^2 a_2}{} - a_1 a_2$.

Теорема. *Пусть a, b, c - стороны треугольника ABC, 2p=a+b+c. Тогда* $l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc}$.

Доказательство: Из предыдущей теоремы $l_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$. Далее,

$$l_a^2 = bc \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2} = \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2};$$

$$l_a^2 = \frac{bc \cdot 4p \cdot (p-a)}{(b+c)^2};$$

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc}.$$

5. Теорема Штейнера-Лемуса

Теорема. *Если в треугольнике две биссектрисы равны, то треугольник равнобедренный.*

Доказательство 1:

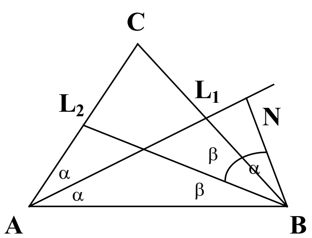


Рис. 11

Пусть $\alpha > \beta$, $AL_1 = BL_2$. Тогда $2\alpha > \alpha+\beta$. Отложим от луча BL_2 в ту же полуплоскость, в которой лежит луч BC, угол α; N - точка пересечения биссектрисы AL_1 с этим лучом. Тогда $AN > AL_1$. Вокруг четырехугольника AL_2L_1B можно описать окружность. В ней $\alpha+\beta < 2\alpha$, поэтому $AN < BL_2 = AL_1$. Противоречие. Аналогично, получим противоречие, предположив $\alpha < \beta$. Осталось сделать вывод, что $\alpha = \beta \Rightarrow 2\alpha = 2\beta \Rightarrow \angle BAC = \angle ABC$, что и требовалось доказать.

Доказательство 2 также проводится методом от противного.

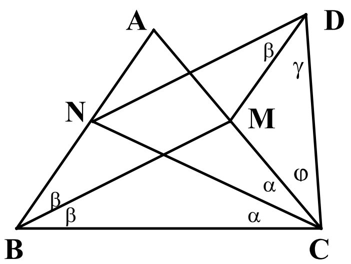


Рис. 12

Пусть $\alpha > \beta$. Боковые стороны треугольников BCN и CBM равны, но у первого угол при вершине больше, чем у второго. Отсюда $BN > CM$; $MD > MC$; $\angle MCD > \angle MDC$, $\varphi > \gamma$, т.е. $\alpha + \varphi > \beta + \gamma$, а поэтому $ND > NC$, $BM > CN$. Противоречие с условием.

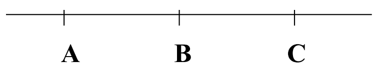
Доказательство 3: $l_a = l_b$; $bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} = ac - \frac{ab^2c}{(a+c)^2}$; $a - c = ab\left(\frac{b}{(a+c)^2} - \frac{a}{(b+c)^2}\right)$. Если $a > b$, то $a - b > 0$. С другой стороны $\frac{b}{(a+c)^2} - \frac{a}{(b+c)^2} < 0$. Противоречие.

Доказательство 4: $l_a = l_b, \frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc} = \frac{2}{a+c}\sqrt{p(p-b)ac}, a = b$.

6. Биссектриса внешнего угла

Если точка C лежит внутри отрезка AB, $\lambda = \frac{AC}{CB}$, то мы говорим, что точка C делит отрезок AB в отношении λ. К этому можно добавить слова внутренним образом, это означает, что точка C может делить отрезок AB внешним образом.

Пусть точка C лежит на прямой AB вне отрезка AB, $\lambda = \frac{AC}{CB}$. Будем

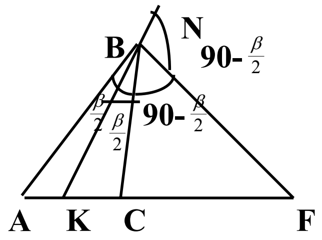


говорить, что точка C делит отрезок в отношении λ внешним образом. В этих терминах теорему о биссектрисе можно переформулировать так: биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении прилежащих сторон внутренним образом.

Оказывается, повторив почти дословно рассуждения, можно доказать и такую теорему:

Теорема. *Биссектриса внешнего угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении прилежащих сторон внешним образом.*

Доказательство:



Пусть F - точка пересечения продолжения стороны AC треугольника ABC и биссектрисы NBC .

Требуется доказать, что $\frac{AF}{FC} = \frac{AB}{BC}$. Для доказательства применим, например, метод площадей:

$$(1)\ \frac{S_{ABF}}{S_{CBF}} = \frac{\frac{1}{2}AF \cdot h}{\frac{1}{2}FC \cdot h} = \frac{AF}{FC}$$

Задача. Найдите геометрическое место точек, отношения расстояний от которых до двух фиксированных точек постоянно.

Решение. Даны две точки A и B. На прямой AB возьмем две точки K и L, которые делят отрезок AB в данном отношении одна внутренним образом, а другая внешним. Если M - точка нашего геометрического места, то $\angle KML$ прямой и точка M лежит на окружности с диаметром KL. Эта окружность носит название *окружности Аполлония.*

Упражнения

Постройте треугольник по основанию, отношению боковых сторон и

а) высоте, опущенной на основание:

б) медиане, проведенной из вершины:

в) биссектрисе угла при вершине:

г) медиане, проведенной к боковой стороне:

д) углу при вершине:

е) углу при основании:

ж) радиусу описанной окружности.

7. Задачи с решениями

Задача 1. *Постройте треугольник по высоте, биссектрисе и медиане одной вершины.*

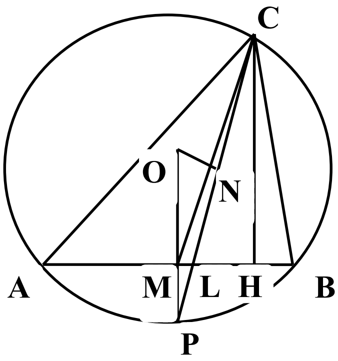


Рис. 13

Решение. Отложим отрезок CH, равный высоте. На прямой, ему перпендикулярной и проходящей через H, отметим точки M и L, для которых длина CM равна медиане, а CL - биссектрисе. P - точка пересечения CL и прямой, проведенной через M параллельно CH, O - точка пересечения прямой MP и серединного перпендикуляра отрезка CP. Окружность радиуса OC пересекает MH в точках A и B. Треугольник ABC искомый.

Задача 2. *В треугольнике ABC проведены биссектрисы AM и BN. Пусть O - точка их пересечения. Известно, что* $AO:OM=\sqrt{3}:1$; $BO:ON=1:(\sqrt{3}-1)$. *Найдите углы треугольника.*

Решение:

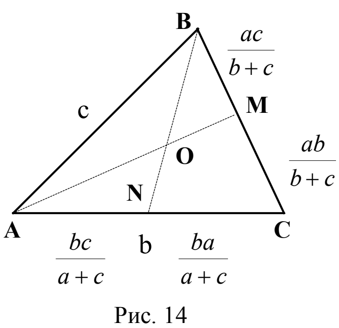


Рис. 14

Пусть $\left.\begin{array}{l}\frac{BM}{MC}=\frac{c}{b},\\ BM+MC=a\end{array}\right\}$.Отсюда $BM=\frac{ac}{b+c}$, $MC=\frac{ab}{b+C}$.

По свойству биссектрисы BO треугольника ABM имеем $\frac{AO}{OM}=\frac{AB}{BM}\Rightarrow\frac{c}{\frac{ac}{b+c}}=\frac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\frac{b+c}{a}=\sqrt{3}$ По свойству биссектрисы AO треугольника ABN $\frac{AB}{AN}=\frac{BO}{ON}\Rightarrow\frac{c}{\frac{bc}{a+c}}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}$. Получим систему

$$\begin{cases} b+c=\sqrt{3}a, \\ a+c=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot b \end{cases};$$

$$a=c\sqrt{3},\ b=\sqrt{3}a-c=2c.$$

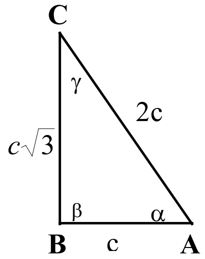


Рис. 15

Ответ: 30^0, 60^0, 90^0.

Задача 3. *В треугольнике ABC сторона AC=76 см,* $\angle B=\frac{2\pi}{3}$, *O - центр вписанной окружности. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ACO.*

Решение: $\angle ACO=180-\frac{\alpha}{2}-\frac{\gamma}{2}=180-\frac{1}{2}(180-\beta)=$

$=90+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}$.

Пусть R - радиус окружности, описанной около треугольника ACO. Тогда $\frac{AC}{\sin\frac{5\pi}{6}}=2R$, $2AC=2R$, $R=AC$.

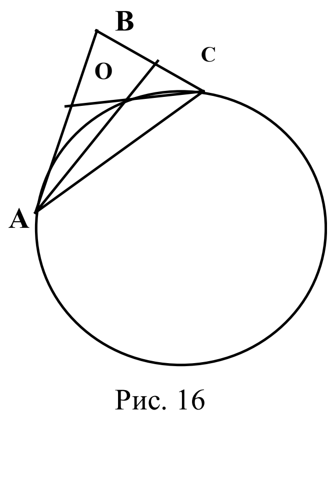


Рис. 16

Ответ: 76 см.

Задача 4. *Медиана и высота делят угол на три равные части. Найдите углы треугольника.*

Решение 1:

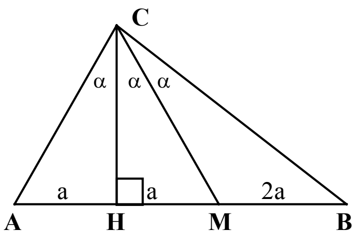


Рис. 17

Δ *ACH* = Δ*MCH* по катету и острому углу. Поэтому треугольник *ACM* равнобедренный, *AH* = *HM*. Если *AH* = *a,* то *HM* = *2a.* По свойству биссектрисы *CM* треугольника *HCB* имеем $\frac{CH}{CB} = \frac{a}{2a}$, т.е. *CB* = 2*CH*, $\angle CBH = 30^0$, $\angle BCH = 60^0$, $\alpha = 30^0$, $\angle C = 90^0$.

Ответ: 30^0, 60^0, 90^0.

Решение 2 не основано на свойствах биссектрис. Приведем его для полноты изложения. Решение основывается на мастерстве дополнительных построений.

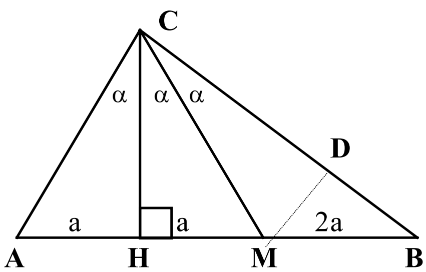


Рис. 18

Естественным дополнительным построением на рис. 18 выглядит высота *MD*, опущенная из точки *M* - середины стороны *AB*, на сторону *BC*. Из равенства треугольников *CMH* и *CMD* следует, что *MD* = *MH* = *a*. Так как *MB* = 2*a,* то в треугольнике *DBM* катет, лежащий против угла *B*, равен половине гипотенузы. Отсюда очевидно следует, что $\angle B = 30^0$, $\angle BCH = 60^0$, $\alpha = 30^0$, $\angle C = 3\alpha = 90^0$, $\angle A = 90\text{-}\alpha = 60^0$.

Решение 3: Пусть *CH* = *h.* В треугольнике *ACH* $tg\alpha = \frac{a}{h}$. А из треугольника *BCH* $tg2\alpha = \frac{3a}{h}$.

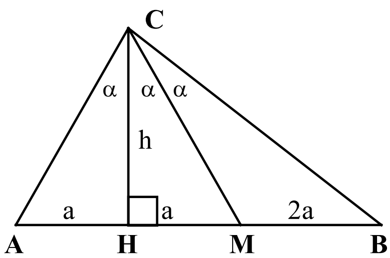


Рис. 19

Отсюда, $tg2\alpha = 3tg\alpha$, $\frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = 3tg\alpha$.

По условию α - острый угол, отличный от нуля, поэтому $tg\alpha \neq 0$ и уравнение сводится к виду $3tg^2\alpha = 1, \quad tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = \frac{\pi}{6}.$

Задача 5. *Постройте треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью медианы, высоты и биссектрисы, проведенных из одной вершины.*

Решение: Анализ. Пусть ABC - искомый треугольник; M, K и H - точки пересечения с описанной окружностью, соответственно, медианы, биссектрисы и высоты, проведенных из вершины C; L - середина AB,

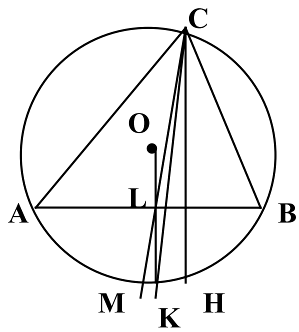


Рис. 20

O - центр описанной окружности (см. рис. 20). Тогда K делит дугу AB пополам. Точки O, L и K лежат на одной прямой, параллельной CH.

Построение. Даны точки M, K и H. Строим окружность с центром O, проходящую через эти три точки. Проводим прямую OK. Через точку H параллельно прямой OK проведем прямую. Ее пересечение с окружностью дает вершину C. Прямые CM и OK пересекаются в точке L. Проведем через точку L прямую, перпендикулярную прямой OK. Ее пересечение с окружностью дает точки A и B. Треугольник ABC - искомый.

Задача 6. *Медиана, биссектриса и высота делят угол на четыре равные части. Найдите углы треугольника.*

Решение: Пусть K - точка пересечения биссектрисы с описанной окружностью, OK параллельна CH, поэтому $\angle HCK = \angle CKM = \alpha$. Отсюда, $CM = MK$. В то же время $CO = OK$ (как радиусы окружности). Поэтому $\angle OCK = \angle MCK$. А это означает, что точка M и O совпадают,

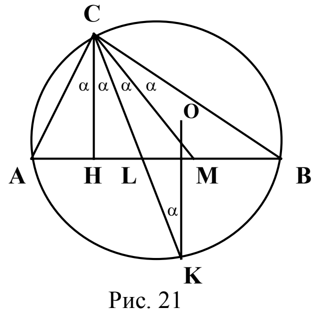


Рис. 21

следовательно, AB - диаметр. Вписанный угол, который опирается на диаметр, - прямой , т.е. $\angle C = 90^0$, $\alpha = 22{,}5^0$, $\angle B = 22{,}5^0$, $\angle A = 90^0\text{-}22{,}5^0$.

Ответ: $22{,}5^0$, $67{,}5^0$, 90^0.

Задача 7. *Основания D, E и F высот треугольника ABC последовательно соединены. Докажите, что высоты исходного треугольника ABC являются биссектрисами треугольника DEF.*

Решение: Пусть P - точка пересечения высот треугольника ABC. Вокруг четырехугольника $AFPE$ можно описать окружность, так как в нем сумма двух противолежащих углов AFP и PEA равна 180^0.

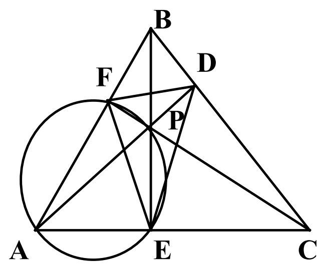


Рис. 22

Вписанные углы PEF и PAF опираются на одну и ту же дугу, и, поэтому, равны, т.е. $\angle BEF = \angle FAD$. Аналогично можно показать, что $\angle BED = \angle BCF$. Углы BAD и BCF равны, так как оба дополняют угол B до прямого. Получили цепочку равенств $\angle BEF = \angle BAD = \angle BCF = \angle BED \Rightarrow \angle BEF = \angle BED$, т.е. прямая BF делит угол DEF пополам. Аналогично утверждение доказывается и для других углов.

Задача 8. *К - центр окружности, вписанной в треугольник ABC, L - точка пересечения биссектрисы, проведенной из вершины B, с описанной окружностью. Докажите, что KL=AL.*

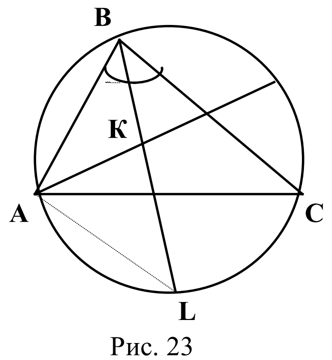


Рис. 23

Доказательство:

$\angle LAK = \angle LAC + \angle KAC = \angle LBC + \angle KAB = \angle LBA + \angle KAB = \angle LKA$. Здесь мы воспользовались тем, что K - точка пересечения биссектрис ($\angle LAC = \angle KAC$, $\angle LBC = \angle LBA$) и тем, что вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны ($\angle LAC=\angle LBC$) и тем, что внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, не смежных с ним ($\angle KBA+\angle KAB=\angle AKL$). Таким образом, $\angle LAK=\angle LKA$, т.е. треугольник ALK равнобедренный.

Задача 9. *Биссектрисы двух внешних углов треугольника и внутреннего угла пересекаются в одной точке. Докажите это.*

Доказательство: Пусть P - точка пересечения биссектрис двух внешних углов (см. рис. 24). Опустим из этой точки перпендикуляры PK, PL, PM на стороны треугольника или их продолжения. По свойству биссектрис $PK = PL$ и $PL = PM$. Отсюда $PK = PM$ и вновь по свойству биссектрисы получим, что точка P лежит на биссектрисе внутреннего угла. Утверждение доказано полностью. Заметим, что точки K, L и M лежат на одной окружности с центром в точке P. Эта окружность касается стороны треугольника и продолжения двух других сторон и называется *вневписанной* окружностью.

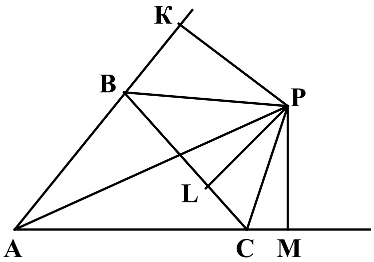


Рис. 24

Задача 10. *Даны три точки пересечения биссектрис внутренних углов треугольника с описанной окружностью. Построить треугольник.*

Решение: Анализ. Пусть A, B и C - данные точки пересечения биссектрис углов треугольника PQR. Если обозначим дугу AP через x, то $AQ=x$ тоже. Соответственно, $y = BQ = BR$, $z = CR = CA$.

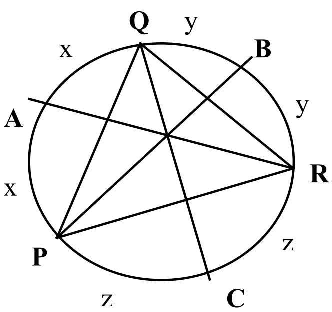


Рис. 25

Тогда $\begin{cases} x+y=AB, \\ y+z=BC, \\ x+z=AC. \end{cases}$

Осталось решить эту систему: $x + y + z = 180^0$, $z = 180^0\text{-}AB$, $y=180^0\text{-}AC$, $x=180^0\text{-}BC$.

Построение. Даны три точки A, B и C. Проводим через них окружность. От точки A отложим против часовой стрелки дугу 180^0-BC, получим точку P. От точки B отложим против часовой стрелки дугу 180^0-AC, получим точку Q. От точки C отложим дугу 180^0-AB, получим точку R. Треугольник PQR - искомый.

Задача 11. *Дана прямая и две точки по разные стороны от нее. Постройте угол, стороны которого проходят через эти точки, а прямая является его биссектрисой.*

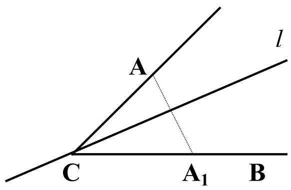


Рис. 26

Решение:

Отобразим данную точку A симметрично относительно данной прямой l. Получим точку A_1. Пусть C - точка пересечения прямых l и A_1B. Тогда угол ACB - искомый.

Задача 12. *Даны две пересекающиеся прямые l_1 и l_2 и точка A вне их. Постройте треугольник, для которого прямые были бы биссектрисами углов треугольника, а точка A - вершиной.*

Решение: Отобразим точку A симметрично относительно прямых l_1 и l_2 .

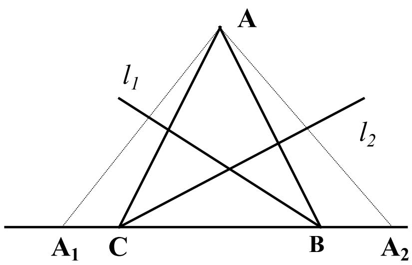


Рис. 27

В силу свойств биссектрисы угла полученные точки A_1 и A_2 должны лежать на стороне или ее продолжении искомого треугольника. Осталось провести прямую A_1A_2. Точки B и C ее пересечения с прямыми l_1 и l_2 - это и есть две другие вершины искомого треугольника.

Задача 13. Проведите касательную к данной окружности, одинаково наклоненную к двум данным прямым.

Решение. Случай 1. Прямые пересекаются. Одинаково наклонены к ним биссектрисы двух пар вертикальных углов. Проведем прямую, касательную к данной окружности и параллельную биссектрисе. Задача имеет четыре решения. Случай 2. Прямые параллельны. Одинаково наклонены к ним все прямые. Следовательно, в этом случае задача имеет бесконечное множество решений.

Задача 14. Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из этого угла.

Решение. Дано: α, h_a, l_a. Проведем две параллельные прямые на расстоянии h_a. Из любой точки A одной прямой радиусом l_a сделаем засечку L на другой прямой. Проведем в разных полуплоскостях от AL лучи с началом A под углом $\alpha/2$. Пусть B и C - точки пересечения этих лучей со второй прямой. Треугольник ABC - искомый.

Задача 15. Прямая l параллельная хорде AB и не пересекает окружность. Рассматриваются точки C окружности, расположенные по одну сторону от AB. Прямые CA и CB пересекают l в точке D и E. Докажите, что существует фиксированная точка F плоскости, не лежащая на прямой l, для которой угол DFE постоянен.

Решение: Красота математики – сильное воспитательное средство и в этом смысле благодатная тема – симметрия. Изучение математики воспитывает – чувство симметрии, чувство гармонии. Такое вступление могло бы быть эпиграфом к решению, а на самом деле является ключом к решению.

Соображение симметрии заставляют прежде всего провести прямую, проходящую через центр O окружности и середину P хорды AB (рис. 1). Они же приводят к предположению, что точку F надо искать на этой оси симметрии. Возможно это точка P.

Если бы из точки P отрезок DE был бы виден под одним и тем же углом при любом положении точки C, то луч PK был бы биссектрисой $\angle DPE_1$. Легко видеть, что AK – биссектриса $\angle DAE_1$, то есть точка A и искомая точка F (но не P) принадлежат геометрическому месту точек, для которых $\frac{DF}{FE_1} = \frac{DK}{KE_1} = \frac{AD}{AE_1}$.

Для построения этого геометрического места точек, надо возвести перпендикуляр к прямой AK в точке A. Он пройдет точку P и затем пересечет l в некоторой точке N. Строим окружность с диаметром KN. Строим симметричную окружность. Эти две окружности (Аполлония) обязательно пересекутся и точка их пересечения искомая точка F (рис. 3).

Если A – точка касания касательной, проведенной из точки В к окружности, то $\angle ABC$ =30°. Для любой секущей BF угол FBC меньше 30°.

Для обоснования чертежа заметим, что если $AB = AC$, то $AQ > MQ$. Если $AB \neq AC$, то возможен вариант, симметричный рассмотренному, который не будем исследовать, так как надо повторить все рассуждения с углом C вместо B.

Упражнения

1. Найдите наибольший возможный угол B треугольника ABC, если $AB = b,$ $BC = a, a > b$. (Ответ: $arcsin\ b/a$)
2. M – середина $BC,$ Q – точка пересечения биссектрис ΔABC. Докажите, что вокруг $AQMB$ или $AQMC$ можно описать окружность.

Задача 16. M – середина сторон BC треугольника ABC, Q – точка пересечения биссектрис, $MQ = QA$. Найдите наименьшее возможное значение $\angle MQA$.

Решение: Из точки Q опустим перпендикуляры QK и QN на стороны AC и BC. Как радиусы вписанной окружности $QK = QN$. Треугольники AQK и MQN равны по гипотенузе и катету, $\Rightarrow AK = MN \Rightarrow AC = MC \Rightarrow BC = 2AC$. Заметим, что $\angle BAQ + \angle BMQ = 180° \Rightarrow \angle ABM + \angle MQA = 180° \Rightarrow \angle MQA = 180° - \beta$.

Задача свелась к нахождению наибольшего угла β в ΔABC, в котором основание AC в два раза меньше боковой стороны BC; $AC = b,$ $BC = 2b$.

Возьмем окружность с центром C радиуса $2b$. Построим окружность с центром на серединном перпендикуляре отрезка AC, проходящую через точки A и C и касающуюся первой окружности в точке B. Тогда $\angle B = 30°$, ΔABC прямоугольный. Из любой точки этой окружности отрезок AC виден под углом 30°. Из точки вне ее – под углом <30°, из точки внутри круга >30°, $\Rightarrow \angle B$=30° наибольший.

Если A – точка касания касательной, проведенной из точки В к окружности, то $\angle ABC$ =30°. Для любой секущей BF угол FBC меньше 30°.

Для обоснования чертежа заметим, что если $AB = AC$, то $AQ > MQ$. Если $AB \neq AC$, то возможен вариант, симметричный рассмотренному, который не будем исследовать, так как надо повторить все рассуждения с углом C вместо B.

Ответ: 150°.

Задачи для самостоятельной работы

1. В треугольнике ABC сторона AB вдвое длиннее BC, BD - биссектриса. Через точку D параллельно BC проведена прямая, пересекающая AB в точке E. В каком отношении точка M пересечения BD и CE делит биссектрису BD?
2. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника делит противоположный катет на 10 и 8. Чему равна длина второго катета?
3. Вычислите третью сторону и площадь треугольника по двум сторонам и биссектрисе угла между ними.
4. Докажите, что в треугольнике большей стороне соответствует меньшая биссектриса.
5. Выразите через стороны треугольника ABC расстояния от вершин B и C до биссектрисы внутреннего угла A.
6. Вычислите катеты прямоугольного треугольника, зная длину c его гипотенузы и длину l биссектрисы одного из острых углов.
7. Найдите угол А треугольника, если заданы стороны a и b и биссектриса l угла между ними.
8. В треугольник со сторонами a, b, c вписан круг. Определите стороны треугольника, вершинами которого служат точки касания вписанной окружности со сторонами вписанной окружности со сторонами данного треугольника.
9. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную около него окружность в точке D. Найдите длину хорды DC, Если центр окружности, вписанной в данный треугольник удален от точки D на расстояние 7.
10. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе.
11. Докажите, что площадь треугольника, вершинами которого являются основания биссектрис его внутренних углов, равна произведению длин этих биссектрис, разделенному на удвоенный периметр.
12. Угол A треугольника ABC вдвое больше угла B. По данным сторонам b и c найдите a.

13. Построить треугольник по точкам пересечения биссектрис его углов с описанной окружностью.

14. Постройте прямоугольный треугольник, зная его гипотенузу и биссектрису острого угла.

15. Докажите, что все три биссектральные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

Содержание

Учебное издание

Геннадий Константинович Пак

Компьютерный набор Н.В. Демко

Корректор А.М. Мищенко

Научный редактор В.И. Ткаченко

ЛР020277. Подписано в печать 5.07.03. Формат 60×84 1/16.

Бум. тип. №2. Усл. печ. л. 2. Уч. изд. л. 1,98. Тираж 1000 экз.

Издательство Дальневосточного университета

690600, Приморский край, г. Владивосток, ул. Октябрьская, 27

Отпечатано в учебно-полиграфическом комплексе

Института математики и компьютерных наук

Дальневосточного госуниверситета

690600, Приморский край, г. Владивосток, ул. Октябрьская, 27