Е.А. БУНИМОВИЧ, В.А. БУЛЫЧЕВ

ВЕРОЯТНОСТЬ И СТАТИСТИКА В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Лекции 1—4

Москва
«Педагогический университет «Первое сентября»
2005

Е.А. Бунимович, В.А. Булычев

Е.А. Бунимович, В.А. Булычев. Вероятность и статистика в курсе математики общеобразовательной школы: лекции 1—4. — М. : Педагогический университет «Первое сентября», 2005. – 128 с.

Учебное-методическое пособие

Редактор *Л.О. Рослова*
Корректор *Л.А. Громова*
Компьютерная верстка *О.В. Сухарева*

Подписано в печать 10.09.2005.
Формат 60x90/16. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Печ. л. 8,0.
Тираж 300 экз. Заказ №
Педагогический университет «Первое сентября»,
ул. Киевская, д. 24., Москва, 121165
http://edu.1september.ru

Учебный план курса

№ брошюры	Учебный материал
1	Лекция № 1. Случайные события и вероятность
1	Лекция № 2. Комбинаторика в вычислении вероятностей
1	Лекция № 3. Свойства вероятностей
1	Лекция № 4. Случайные величины и их распределения. **Контрольная работа № 1** «Вычисление вероятностей»
2	Лекция № 5. Анализ данных
2	Лекция № 6. Случайная выборка и ее представление
2	Лекция № 7. Числовые характеристики случайной выборки. **Контрольная работа № 2** «Анализ случайной выборки»
2	Лекция № 8. Испытания Бернулли
Итоговая работа. Итоговая работа должна представлять собой разработку урока по теме «Вероятность и статистика», созданную на основе материалов данного курса лекций. Подробный конспект урока, сопровождаемый справкой из образовательного учреждения, подтверждающей факт его проведения, должен быть представлен в Педагогический университет	

Лекция 1
Случайные события и вероятность

В нашей первой лекции мы поговорим о том, что такое вероятность и научимся ее вычислять.

В толковом словаре русского языка С.И. Ожегова и Н.Ю. Шведовой читаем: «Вероятность — возможность исполнения, осуществимости чего-нибудь». Мы часто употребляем в повседневной жизни «вероятно», «вероятнее», «невероятно», вовсе не имея в виду конкретные количественные оценки этой возможности исполнения.

Основатель современной теории вероятностей А.Н. Колмогоров писал о вероятности так: «Вероятность математическая — это числовая характеристика степени возможности появления какого-либо определенного события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз условиях».

Итак, в математике вероятность измеряется числом. Совсем скоро мы выясним, как именно это можно сделать. Но начнем мы с обсуждения того, у каких событий бывает «математическая вероятность» и что представляют собой эти «определенные, могущие повторяться неограниченное число раз условия». Именно поэтому наша первая лекция начинается с рассмотрения случайных событий и случайных экспериментов.

1. Случайные события. Случайный эксперимент. Элементарные исходы

Нужно сказать, что теория вероятностей, как никакая другая область математики, полна противоречий и парадоксов. Объяснение этому очень простое — она слишком тесно связана с реальной, окружающей нас действительностью. Долгое время ее вместе с математической статистикой даже не хотели причислять к математическим дисциплинам, считая их сугубо прикладными науками.

Только в первой половине прошлого века, в основном благодаря трудам нашего великого соотечественника А.Н. Колмогорова, имя которого уже упоминалось выше, были построены математические основания теории вероятностей, которые позволили отделить собственно науку от ее приложений. Подход, предложенный Колмогоровым, теперь принято называть аксиоматическим, поскольку вероятность в нем (а точнее, вероятностное пространство) определяется как некая математическая структура, удовлетворяющая определенной системе аксиом.

Именно на этом подходе построен современный вузовский курс теории вероятностей, через который прошли в свое время все нынешние учителя математики. Однако в школе такой подход к изучению вероятности (да и математики в целом) вряд ли разумен. Если в вузе основной акцент делается на изучении математического аппарата для исследования вероятностных моделей, то в школе *ученик должен научиться эти модели строить*, анализировать, проверять их адекватность реальным ситуациям. Такую точку зрения разделяют сегодня большинство ученых, занимающихся проблемами школьного математического образования.

* * *

В современных школьных учебниках, включающих с недавнего времени вероятностно-статистический материал, вы найдете примерно следующее определение: событие называется **случайным**, если при одних и тех же условиях оно может как произойти, так и не произойти. Случайным будет, например, событие «При подбрасывании игрального кубика выпадет 6 очков».

В приведенном определении неявно подразумевается одно важное требование, которое необходимо подчеркнуть: мы должны иметь возможность *неоднократно воспроизводить одни и те же условия, в которых наблюдается данное событие* (например, подбрасывать кубик), — иначе невозможно судить о его случайности.

Стало быть, говоря о любом случайном событии, мы всегда имеем в виду наличие определенных условий, без которых об этом событии вообще не имеет смысла говорить. Этот комплекс условий называют **случайным опытом** или **случайным экспериментом**.

В дальнейшем *мы будем называть случайным любое событие, связанное со случайным экспериментом*. До эксперимента, как правило, невозможно точно сказать, произойдет данное событие или не произойдет — это выясняется лишь после его завершения. Но неспроста мы сделали оговорку «как правило»: в теории вероятностей принято считать случайными все события, связанные со случайным экспериментом, в том числе:

- **невозможные**, которые никогда не могут произойти;
- **достоверные**, которые происходят при каждом таком эксперименте.

Например, событие «На игральном кубике выпадет 7 очков» — невозможное, а «На игральном кубике выпадет меньше семи очков» — достоверное. Разумеется, если речь идет о кубике, на гранях которого написаны числа от 1 до 6.

* * *

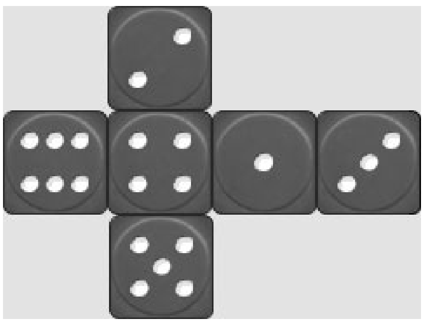
Рассмотрим несколько наиболее излюбленных в теории вероятностей примеров случайных экспериментов.

<u>Опыт 1</u>. Подбрасывание монеты. Этот эксперимент в некотором смысле можно считать простейшим случайным опытом. В результате такого эксперимента монета может упасть на одну из двух своих сторон — «орел» или «решка».

Напомним, что «решкой» называется лицевая сторона монеты (аверс), на которой выбит ее номинал — например, 1 рубль. «Орлом» называется обратная сторона монеты (реверс). На российских монетах на этой стороне изображен герб Российского государства — двуглавый орел. Считается, что при подбрасывании монеты она с равными шансами может выпасть на «орла» или «решку». Для реальных монет это может быть не совсем так — ведь, в конце концов, стороны монеты не совсем одинаковые. Кроме того, монета может упасть на ребро или вообще закатиться в щель под пол…

Однако в теории вероятностей, говоря об эксперименте с монетой, имеют в виду некую *идеальную монету*, для которой шансы «орла» и «решки» в каждом эксперименте равны, и других исходов быть не может.

<u>Опыт 2</u>. Подбрасывание кубика. Это следующий по популярности после монеты случайный эксперимент. Речь в нем идет об игральном кубике (или игральной кости), на гранях которого выбиты точки, символизирующие количество очков от 1 до 6.



Если кубик симметричный, то при его подбрасывании он может с равными шансами выпасть на любую из шести граней. Именно с такими *идеальными кубиками* мы и будем иметь дело в дальнейшем. В реальных кубиках шансы граней могут сильно отличаться. Иногда этого добиваются специально, запаивая внутрь кубика дробинку, смещенную к одной из его граней. Если, например, сместить такую дробинку к грани с 1, то на кубике будет чаще выпадать 6 (см. развертку игрального кубика).

Опыт 3. Выбор перчаток. В коробке лежит 3 пары одинаковых перчаток. Из нее, не глядя, вытаскивают две перчатки. Говоря «не глядя», мы лишний раз подчеркиваем непредсказуемость результатов данного опыта. Более точно: мы считаем, что все шесть перчаток имеют одинаковые шансы быть вынутыми из коробки.

Последний пример имеет в теории вероятностей далеко идущее обобщение и носит название «урновой схемы». Имеется в виду коробка (мешок, урна) в которой находится M одинаковых на ощупь шаров. Из нее, не глядя, вынимают N шаров. На шарах могут быть написаны числа, буквы, они могут быть окрашены в разные цвета и т.д. Понятно, что наш опыт с шестью перчатками можно рассматривать как частный случай «урновой схемы», в которой три шара покрашены, например, в белый цвет (левые перчатки) и три шара — в черный (правые перчатки).

Эксперимент с выбором шаров можно проводить по-разному, получая при этом принципиально различные случайные опыты. Наиболее часто используются три схемы выбора.

I. Выбор с возвращением. После извлечения очередного шара информация о нем записывается, и он возвращается обратно в урну. Шары перемешиваются, после чего извлекается следующий шар. Такая процедура повторяется N раз. Понятно, что в таком опыте один и тот же шар может быть вынут многократно. Отметим, что в этом случае число N может быть как меньше, так и больше или равно M.

II. Выбор без возвращения. На этот раз каждый вынутый шар уже не возвращается обратно и, следовательно, повторно вынут быть не может. В этом случае, очевидно, $N \le M$.

III. Одновременный выбор. В таком эксперименте все N шаров вынимаются из урны сразу, одновременно. Позже мы увидим, что принципиальной разницы между моделями II и III нет — во многих задачах можно принять как ту, так и другую схему выбора.

Опыт 4. Тетрадный лист. На тетрадный лист в линейку наудачу бросается монета. Но на этот раз интересуются не тем, какой стороной упала монета, а тем, сколько линеек она при этом пересекла.

Приведенные в этом разделе примеры интересны еще и тем, что огромное количество случайных экспериментов, в которых нет ни монет, ни кубиков, ни шаров, могут быть сведены к одной из рассмотренных моделей. Чуть позже вы убедитесь в этом сами, когда начнете решать задачи на вычисление вероятностей.

* * *

В дальнейшем, говоря о случайном опыте, мы всегда будем подразумевать выполнение двух требований: его *непредсказуемости* и *возможности многократного повторения приблизительно в одних и тех же условиях*. Если хотя бы одно из этих требований не выполняется, то говорить о таких экспериментах мы не будем. Понятно, что все четыре рассмотренных выше эксперимента удовлетворяют этим свойствам. А вот пример эксперимента другого сорта.

<u>Опыт 5.</u> Можно ли считать случайным экспериментом поступление абитуриента Вити Малеева на механико-математический факультет МГУ? Непредсказуемость здесь налицо, а вот возможность многократного повторения — проблематична. Многократно повторить этот эксперимент именно с Витей не представляется возможным даже теоретически, поэтому довольно бессмысленно задаваться вопросом, с какой вероятностью он поступит в университет.

Если этот опыт рассмотреть в более общем контексте — поступление произвольного (случайно выбранного) абитуриента на механико-математический факультет МГУ, — то он приобретает некоторые черты случайного эксперимента, хотя во многом вопрос о неизменности условий остается дискуссионным. Вообще, в примерах из реальной жизни разобраться далеко не всегда так просто, как в идеальных моделях, подобных монете или кубику.

Отметим еще, что за термином «эксперимент» может скрываться и какое-то природное явление, которое происходит само собой, без нашего участия, без «постановки эксперимента». Можно считать, что в этом случае опыт повторяет сама природа.

<u>Опыт 6</u>. Будем считать, что случайный эксперимент состоит в регистрации количества солнечных дней в июле месяце в районе города Задонска. Исход такого опыта заранее непредсказуем, и проводить его мы можем ежегодно. Поскольку глобальное изменение климата на Земле происходит, к счастью, не столь быстро, то условия проведения нашего опыта

можно считать приблизительно одинаковыми. Так что необходимые требования к случайному эксперименту в этом примере выполнены.

К рассмотренным здесь случайным опытам мы будем неоднократно возвращаться на протяжении всей лекции.

* * *

Кроме случайного события, с опытом связано еще одно важное понятие — элементарного исхода. **Исходом** (или **элементарным исходом**, **элементарным событием**) называется один из взаимоисключающих друг друга вариантов, которым может завершиться случайный эксперимент. В результате эксперимента всегда происходит один и только один из его исходов. То есть, с одной стороны, не могут произойти сразу два исхода, с другой — эксперимент не может завершиться вообще без какого-либо исхода.

Попробуем определить число возможных исходов в каждом из рассмотренных выше опытов:

- в опыте 1 — 2 исхода: «орел» и «решка»;
- в опыте 2 — 6 исходов: 1, 2, 3, 4, 5, 6;
- в опыте 3 — 2 исхода: «перчатки на одну руку», «перчатки на разные руки»;
- в опыте 4 — количество исходов зависит от размеров монеты и расстояния между линейками;
- в опыте 5 — 2 исхода: «поступил», «не поступил»;
- в опыте 6 — 32 исхода: 0, 1, 2, …, 31 солнечных дней.

Пожалуй, только в опытах 1 и 2 приведенные ответы не вызывают сомнений.

В опыте 3 можно предложить более детальное описание исходов:

- «обе перчатки на левую руку»;
- «обе перчатки на правую руку»;
- «перчатки на разные руки».

А можно пойти еще дальше — перенумеровать все шесть перчаток (хотя бы мысленно),

и тогда число исходов возрастет до 15:

$$12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\quad 23,\ 24,\ 25,\ 26,\quad 34,\ 35,\ 36,\quad 45,\ 46,\quad 56$$

(для каждого исхода мы указываем здесь номера вынутых из коробки перчаток).

Чтобы найти количество исходов в опыте 4, условимся для определенности считать, что расстояние между линейками равно 8 мм (это действительно так для стандартного тетрадного листа), а диаметр монеты — 20 мм (такой диаметр имеет 1 рубль). Тогда легко сообразить, что монета может пересечь 2 или 3 линейки (докажите!). Значит, у этого опыта два возможных исхода.

Но, с другой стороны, каждый исход опыта и здесь можно описывать более детально: например, фиксировать расстояние от центра монеты до ближайшей линейки. В этом случае каждый исход будет описываться *действительным* числом

$$x, \text{ где } 0 \le x \le 4,$$

и количество возможных исходов станет бесконечным!

Аналогичная «детализация» исходов возможна и в опыте 5 (если, как уже было сказано выше, превратить его в случайный эксперимент): можно взять в качестве исхода сумму набранных баллов или даже сами баллы по каждому из экзаменов.

Все сказанное можно завершить следующим правилом: *при рассмотрении возможных исходов опыта следует выбирать их как можно более «элементарными», неделимыми дальше на более мелкие события*. Использование этого правила позволит в дальнейшем избежать многих ошибок при вычислении вероятностей случайных событий.

* * *

Таким образом, исход — это тоже случайное событие. Как и любое другое, оно может произойти или не произойти в результате случайного эксперимента. Однако в отличие от остальных событий исходы называют еще **элементарными событиями**, желая тем самым подчеркнуть, что эти события состоят только из одного исхода и неделимы на более мелкие.

А вот любое неэлементарное событие будет состоять из некоторого множества исходов, которые называются **благоприятными** для этого события. Благоприятны они в том смысле, что приводят к наступлению данного события.

Если обозначить множество всех возможных исходов опыта буквой Ω[1], то каждый исход можно рассматривать как элемент этого множества:

$$\omega \in \Omega,$$

а любое случайное событие A — как его подмножество:

$$A \subseteq \Omega.$$

При этом невозможное и достоверное события получаются как два частных случая этого включения:

• невозможному событию соответствует пустое множество исходов $\{\varnothing\}$;

• достоверному событию соответствует множество всех исходов опыта Ω.

Именно такой язык — теоретико-множественный — принят в аксиоматическом построении теории вероятностей. Иногда такой подход будет полезен и для нас, но следовать ему на протяжении всего курса мы не будем.

<u>Опыт 2</u>. Подбрасывание кубика. Множество всех исходов опыта $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Приведем примеры случайных событий, связанных с этим опытом:

A = {выпадет четное число} = {2, 4, 6};

B = {выпадет число меньше 3} = {1, 2};

C = {выпадет простое число} = {2, 3, 5}.

Отметим, что иногда разные словесные описания могут приводить к одному и тому же подмножеству исходов, т.е. фактически к одному и тому же событию:

D = {выпадет делитель числа 14} = {1, 2}.

Мы видим, что $D = B$.

---

[1] Использование греческих букв Ω и ω («омега большое» и «омега маленькое») — историческая традиция, сложившаяся в теории вероятностей.

<u>Опыт 3</u>. Выбор перчаток. Возможные исходы этого опыта мы договорились обозначать номерами выбранных перчаток:

$$\Omega = \{12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56\}.$$

Приведем примеры событий, связанных с этим опытом (см. нумерацию перчаток на приведенном ранее рисунке):

A = {обе перчатки на левую руку} = {13, 15, 35};

B = {обе перчатки на правую руку} = {24, 26, 46};

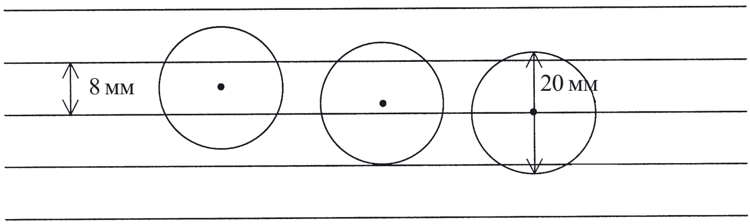
B = {перчатки на одну руку} = {13, 15, 35, 24, 26, 46};

C = {перчатки на разные руки} = {12, 14, 16, 23, 25, 34, 36, 45, 56}.

<u>Опыт 4</u>. Тетрадный лист. Возможные исходы этого опыта, как вы помните, действительные числа из отрезка [0; 4]:

$$\Omega = \{x : 0 \le x \le 4\},$$

где в качестве x мы договорились брать расстояние от центра монеты до ближайшей линии.



Глядя на рисунок, несложно описать множества благоприятных исходов для каждого из следующих событий:

A = {монета пересекла 2 линии} = $\{x : 2 < x \le 4\}$;

B = {монета пересекла 3 линии} = $\{x : 0 \le x \le 2\}$.

Итак, мы ввели три важнейших понятия, лежащих в основе всех вероятностных моделей: случайный эксперимент, случайное событие, исход (элементарное событие). Теперь можно переходить к определению того, что же такое вероятность.

2. Вероятность как предельное значение частоты

Выше уже говорилось, что вероятность случайного события — это числовая мера его правдоподобия. Как можно было бы такую меру ввести? Понятно, что самые правдоподобные события — достоверные. Так что у них эта мера должна быть максимальна. Самые неправдоподобные — невозможные. Соответственно, их мера правдоподобия должна быть минимальна.

Удобно измерять степень достоверности случайных событий числами из отрезка [0; 1]. Тогда достоверным событиям будет соответствовать вероятность 1 (максимально возможная), невозможным — вероятность 0 (минимально возможная). А как измерять вероятность остальных (т.е. собственно случайных) событий?

Весь наш жизненный опыт подсказывает, что любое событие считается тем более вероятным, чем чаще оно происходит. Значит, вероятность должна быть каким-то образом связана с частотой.

<u>Определение 1</u>. **Абсолютной частотой** случайного события A в серии из N случайных опытов называется число N_A, которое показывает, сколько раз в этой серии произошло событие A.

Абсолютная частота всегда выражается целым числом $0 \le N_A \le N$. При этом:

- для невозможного события $N_A = 0$;
- для достоверного события $N_A = N$.

<u>Определение 2</u>. **Относительной частотой** случайного события A в серии из N случайных опытов называется число $F(A)$, которое показывает, какая доля опытов в этой серии завершилась наступлением события A:

$$F(A) = \frac{N_A}{N}.$$

Относительная частота (иногда говорят просто **частота**) выражается числом от 0 до 1. При этом:

- для невозможного события $F(A) = 0$;
- для достоверного события $F(A) = 1$.

Из последнего определения видно, что относительная частота обладает всеми нужными нам свойствами, которые мы хотели бы видеть у величины, измеряющей степень достоверности случайного события:

- относительная частота изменяется от 0 до 1;
- для невозможных событий она равна 0, а для достоверных — 1;
- для любого случайного события его относительная частота тем больше, чем чаще оно происходит при повторении опытов.

Может быть, относительную частоту и нужно принять за вероятность? К сожалению, такое определение приводит к одному неудобству — *значение частоты зависит от конкретной серии опытов и от их количества*.

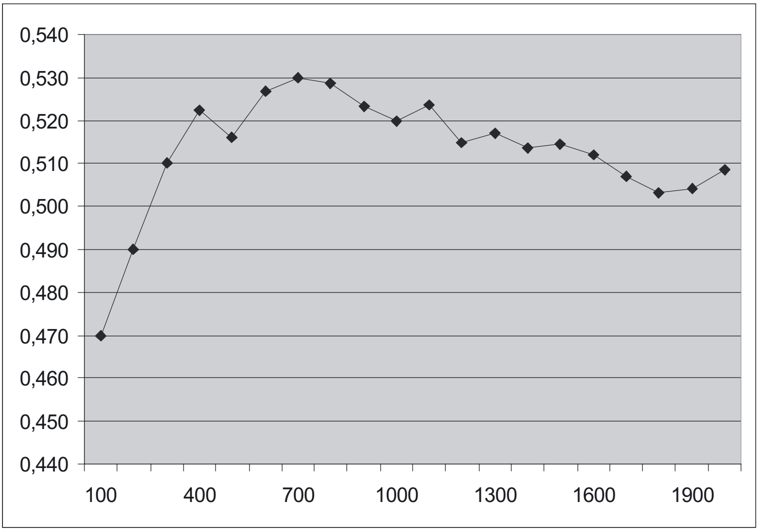
Пример 1. Перед вами относительная частота орлов, полученная в двадцати различных сериях по 100-кратному бросанию монеты:

0,49	0,49	0,53	0,41	0,51	0,51	0,51	0,57	0,46	0,43
0,51	0,58	0,51	0,47	0,47	0,51	0,51	0,48	0,56	0,48

Из этих результатов видно, что частота может значительно колебаться от серии к серии (в нашем примере — от 0,41 до 0,58). Но с другой стороны, совершенно очевидно, что эти колебания происходят около некоторого конкретного числа. Для вас вряд ли будет неожиданностью, если мы объявим, что для нашего примера это число 0,5.

Фундаментальным свойством относительных частот (если хотите — законом природы) является тот факт, что *с увеличением числа опытов относительная частота случайного события постепенно стабилизируется и приближается к вполне определенному числу*, которое и следует считать его **вероятностью**.

Пример 2. Перед вами динамика изменения относительной частоты орлов в длинной серии из 2000 опытов по подбрасыванию монеты. Частота орлов пересчитывалась после каждых 100 опытов и наносилась на график:



По графику видно, что с ростом числа опытов частота начинает постепенно стабилизироваться. Правда, точно назвать то число, около которого происходит эта стабилизация, по графику невозможно. Тем не менее видно, что оно лежит где-то в районе 0,5–0,52. Для более точной оценки следует увеличить количество опытов.

Все сказанное дает возможность дать следующее определение.

Определение 3. **Вероятностью** случайного события A называется число $P(A)$, к которому приближается относительная частота этого события в длинной серии экспериментов[2].

Данное определение (или какое-нибудь близкое к нему) называют во многих учебниках «статистическим определением вероятности». Честно говоря, с математической точки зрения это вообще не определение. Во-первых, где гарантия, что относительная частота вообще будет к чему-то «приближаться»? Во-вторых, почему для каждой серии это будет одно и то же число? В-третьих, насколько длинной должна быть сама серия, чтобы полученная в ней частота достаточно хорошо приближала вероятность? И так далее. Получается, что найти вероятность с помощью этого определения нельзя. Тем не менее оно дает возможность приближенно оценить значение вероятности по частоте — причем тем точнее, чем длиннее серия проведенных экспериментов. Можно было бы сказать, что *вероятность — это предельное значение частоты в бесконечной серии экспериментов*, но, к сожалению, не так просто придать этому высказыванию точный математический смысл. В конце нашего цикла лекций мы еще вернемся к этому утверждению, чтобы облечь его в форму настоящих теорем — *закон больших чисел* и *центральную предельную теорему*.

Вслед за статистическим определением вероятности возникает вопрос: существуют ли какие-либо теоретические, не связанные с проведением экспериментов, методы вычисления вероятностей? Да, существуют, и мы совсем скоро с ними познакомимся. Но, к сожалению, применять эти методы можно далеко не ко всяким случайным опытам. А вот приведенное выше статистическое определение в этом смысле универсально.

---

[2] Обозначение происходит от первой буквы французского слова *probabilite* — вероятность.

* * *

Отметим теперь несколько замечательных свойств относительных частот, из которых немедленно вытекают и соответствующие свойства вероятностей (как их предельных значений).

Свойство 1. Сумма относительных частот всех возможных исходов опыта равна 1 для любой серии экспериментов.

Действительно, каждый эксперимент всегда заканчивается только одним из возможных исходов, поэтому сумма их абсолютных частот будет равна числу проведенных экспериментов. Отсюда сумма относительных частот всегда равна 1.

Так как при увеличении числа опытов относительные частоты неограниченно приближаются к вероятностям, то найденное свойство переносится и на вероятности элементарных исходов (при условии, что этих исходов конечное число):

Свойство 1'. Сумма вероятностей всех элементарных исходов опыта равна 1.

Случайное событие происходит всякий раз, когда опыт завершается одним из благоприятных для него исходов. Это означает, что частота случайного события складывается из частот входящих в него исходов. Отсюда получаем второе свойство частот.

Свойство 2. Относительная частота случайного события равна сумме относительных частот входящих в него исходов.

В применении к вероятностям это будет звучать так:

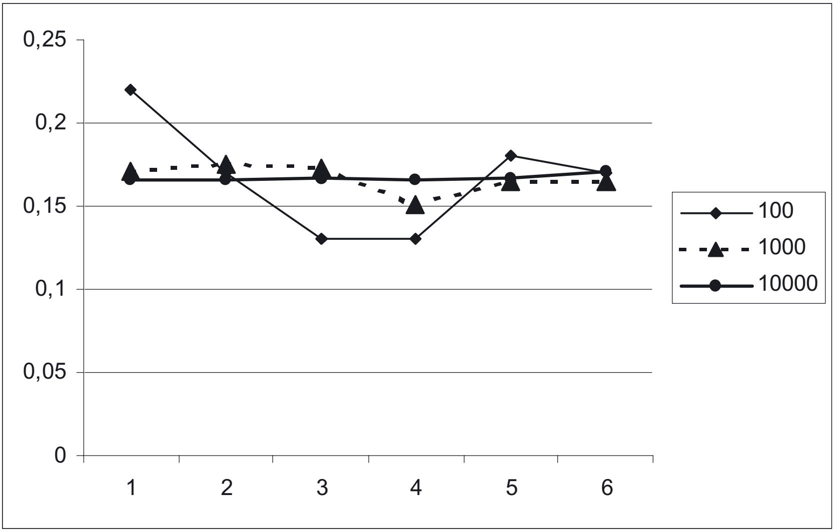
Свойство 2'. Вероятность случайного события равна сумме вероятностей входящих в него исходов.

Проиллюстрируем эти свойства на примере.

Пример 3. В таблице приведены частоты всех исходов опыта с подбрасыванием кубика, зафиксированные после 100, 1000 и 10000 опытов:

Исходы	Частота		
	после 100	после 1000	после 1000
1	0,22	0,171	0,1660
2	0,17	0,175	0,1652
3	0,13	0,173	0,1664
4	0,13	0,151	0,1658
5	0,18	0,165	0,1662
6	0,17	0,165	0,1704
Сумма	1	1	1

Сложив в любой момент частоты всех шести исходов, можно убедиться, что их сумма равна 1. Интересно изобразить полученные частоты исходов на диаграмме:



Мы видим здесь три ломаных (они называются «полигонами частот»), показывающих соотношение частот шести исходов нашего опыта после 100, 1000 и 10000 опытов. Хорошо видно, как при увеличении числа опытов происходит выравнивание ломаной (она вытягивается в горизонтальный отрезок), и приближение всех шести частот к $\frac{1}{6}$ — это и есть вероятность каждого из шести исходов

Теперь, пользуясь свойством 2, найдем частоты случайных событий, о которых шла речь ранее:

A = {выпадет четное число} = {2, 4, 6};

B = {выпадет число меньше 3} = {1, 2};

C = {выпадет простое число} = {2, 3, 5}.

Событие	Частота		
	после 100	после 1000	после 10 000
A	0,47	0,491	0,5014
B	0,39	0,346	0,3312
C	0,48	0,513	0,4978

Частота каждого из событий колеблется около некоторого числа — соответствующей вероятности. Уже в следующем пункте мы выясним (хотя нетрудно догадаться об этом и сейчас), что

$$P(A)=\frac{1}{2};\ P(B)=\frac{1}{3};\ P(C)=\frac{1}{2}.$$

* * *

В заключение этого раздела скажем еще вот что. У неравнодушного читателя, возможно, уже возник вопрос: а кто же это не поленился 10 000 раз бросить кубик для того, чтобы получить приведенные в последнем примере результаты? Признаемся честно, что «натурный» эксперимент мы не проводили — слишком много нужно затратить на это времени и сил. История вообще знает не так много достаточно длинных реальных серий случайных испытаний. Один из наиболее известных в этом отношении примеров — известный опыт Пирсона, в котором он провел серию из 24 000 подбрасываний монеты. Сколько времени на это было потрачено, сказать трудно. Известно лишь, что во время проведения эксперимента Пирсон находился в долговой тюрьме и располагал неограниченным запасом свободного времени…

В нашем примере данные об испытаниях с кубиком были взяты, разумеется, не из головы — это, во-первых, нечестно, во-вторых, слишком рискованно — можно не учесть всех непредвиденных закономерностей случая! На самом деле, мы смоделировали эти 10 000 испытаний с помощью компьютера (конкретно в этом примере — с помощью электронной таблицы Excel, в более сложных ситуациях — с привлечением языка программирования Паскаль). К моделированию случайных экспериментов с помощью компьютера и к практической пользе, которую можно извлечь из такого моделирования, мы еще вернемся в конце нашего цикла лекций.

3. Опыты с равновозможными исходами. Классическое определение вероятности

Итак, мы установили, что вероятность случайного события складывается из вероятностей составляющих его элементарных исходов. Если этих исходов конечное число и вероятности их известны, то можно найти вероятность случайного события как сумму вероятностей входящих в него исходов:

если $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$, то $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_k)$.

Применим эту формулу к вычислению вероятностей для случайных событий, связанных с подбрасыванием кубика (см. раздел 1, опыт 2):

A = {выпадет четное число} = {2, 4, 6}, $P(A) = P(2) + P(4) + P(6)$;

B = {выпадет число меньше 3} = {1, 2}, $P(B) = P(1) + P(2)$;

C = {выпадет простое число} = {2, 3, 5}, $P(C) = P(2) + P(3) + P(5)$.

Чтобы найти ответ, остается выяснить, как определить вероятность каждого из элементарных исходов. В общем случае это сделать не просто. Однако для кубика почти очевидно, что все исходы имеют одну и ту же вероятность $\frac{1}{6}$.

На чем основана такая убежденность? Прежде всего об этом говорят результаты проведенных нами испытаний. Мы видели, что с увеличением числа опытов относительные частоты всех шести исходов начинают выравниваться и приближаться к одному и тому же числу $\frac{1}{6}$. Тем не менее сколько бы опытов мы ни провели, полной уверенности, что это и есть вероятность, у нас все равно не будет!

Эта уверенность возникает скорее по другой причине — из-за симметрии кубика. Каждая из шести граней ничем не лучше (и не хуже) любой из пяти оставшихся. Это дает нам все основания утверждать, что шесть исходов этого опыта имеют одинаковую вероятность, или, как говорят, *равновозможны*. То же самое можно сказать про два исхода при подбрасывании монеты в опыте 1, про 15 исходов при выборе двух из шести перчаток в опыте 3 и даже про бесконечное число исходов в опыте 4. А вот считать равновозможными исходы опытов 5 и 6 никаких оснований, разумеется, нет. Их вероятность можно оценить только по частоте, найденной по результатам имеющихся статистических наблюдений.

* * *

Итак, если все исходы эксперимента имеют равные шансы, то они называются **равновозможными**. Чаще всего равновозможность исходов следует из условий проведения опыта и симметрии тех объектов, которые в нем участвуют. Для опытов с конечным числом равновозможных исходов можно сформулировать простое правило подсчета вероятности любого случайного события, получившее название **формулы классической вероятности** или формулы Лапласа.

Рассмотрим случайный эксперимент, который может завершиться одним из n равновозможных исходов. Пусть ровно m из этих исходов благоприятствуют (т.е. приводят к наступлению) случайного события A. Тогда вероятность этого события может быть вычислена по формуле:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Формула немедленно следует из равновозможности всех исходов и из свойства, по которому вероятность случайного события равна сумме вероятностей входящих в него исходов.

Вернемся к рассмотренным ранее случайным опытам и найдем вероятности приведенных в них событий по формуле классической вероятности:

Опыт 2. У этого опыта $n = 6$ равновозможных исходов. Найдем количество благоприятных исходов для каждого из описанных выше событий (см. раздел 1):

$$m_A = 3, m_B = 2, m_C = 3;$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Опыт 3. В этом опыте, как мы уже видели, $n = 15$ равновозможных исходов. Найдем для каждого из событий количество благоприятных исходов (см. раздел 1):

$$m_A = 3,\ m_B = 3,\ m_C = 6,\ m_D = 9\ ;$$

$$P(A) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},\ P(B) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},\ P(C) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5},\ P(D) = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}\ .$$

Опыт 4. В этом опыте все исходы равновозможны, но количество их бесконечно, поэтому формула Лапласа здесь неприменима. Тем не менее вычисление вероятности без проведения эксперимента возможно и здесь, но на основе другой формулы — формулы геометрической вероятности, о которой пойдет речь в следующем разделе.

* * *

Формула классической вероятности дает очень простой, не требующий проведения экспериментов, способ вычисления вероятностей. Однако простота этой формулы очень обманчива. Дело в том, что при ее использовании возникают, как правило, два очень непростых вопроса:

1. Как выбрать систему исходов опыта так, чтобы они были равновозможны, и можно ли это сделать вообще?

2. Как найти числа m и n?

Если в опыте участвуют несколько предметов, равновозможные исходы увидеть не всегда просто (мы уже могли в этом убедиться на примере с перчатками). Великий французский философ и математик Даламбер вошел в историю теории вероятностей со своей знаменитой ошибкой, суть которой в том, что он неверно определил равновозможность исходов в опыте всего с двумя монетами!

Опыт 7 (ошибка Даламбера). Подбрасываем две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что они упадут на одну и ту же сторону?

Решение Даламбера. Опыт имеет три равновозможных исхода:

1. обе монеты упадут на «орла»;

2. обе монеты упадут на «решку»;

3. одна из монет упадет на «орла», другая на «решку».

Из них благоприятными для нашего события будут два исхода, поэтому искомая вероятность равна $\frac{2}{3}$.

Правильное решение. Опыт имеет четыре равновозможных исхода:

1. первая монета упадет на «орла», вторая тоже на «орла»;

2. первая монета упадет на «решку», вторая тоже на «решку»;

3. первая монета упадет на «орла», а вторая — на «решку»;
4. первая монета упадет на «решку», а вторая — на «орла».

Из них благоприятными для нашего события будут два исхода, поэтому искомая вероятность равна $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Даламбер совершил одну из самых распространенных ошибок, допускаемую при вычислении вероятности: он объединил два элементарных исхода в один, тем самым сделав его не равным по вероятности оставшимся исходам опыта. Чтобы не повторить эту ошибку, помните, что *природа различает все предметы*, даже если внешне они для нас неотличимы. Рассмотрим применение этого правила еще на одном интересном примере.

Опыт 8. Из коробки, в которой 2 белых и 2 черных шара, вытаскивают 2 шара. Какова вероятность, что они окажутся одного цвета?

Для этой задачи мы приведем целых четыре разных решения (с разными ответами!).

Решение 1. В коробке четыре шара: ○○●●

Возможные исходы опыта:

1. ○ ○ — вынули 2 белых шара;
2. ○ ● — вынули 1 белый и 1 черный шар;
3. ● ● — вынули 2 черных шара.

Благоприятными для нашего события будут исходы 1 и 3. Отсюда:

$$n=3,\ m=2,\ P(A)=\frac{2}{3}.$$

В этом решении мы считали, что шары вынимались одновременно, поэтому не различали, какой из них вынут первым, а какой — вторым. Попробуем считать, что шары вынимаются друг за другом (без возвращения).

Решение 2. В коробке четыре шара: ○○●●

Возможные исходы:

1. ○ ○ — и в первый, и во второй раз вынули белые шары;
2. ○ ● — вынули сначала белый шар, потом черный;
3. ● ○ — вынули сначала черный шар, потом белый;
4. ● ● — и в первый, и во второй раз вынули черные шары.

Благоприятными для нашего события будут исходы 1 и 4. Отсюда:

$$n=4,\ \ m=2,\ \ P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ .$$

Получили другой ответ! А теперь пронумеруем (хотя бы мысленно) шары, которые находятся в коробке.

<u>Решение 3</u>. В коробке четыре шара: ① ② ❸ ❹

Будем снова считать, что шары вынимаются одновременно. Возможные исходы:

1. ① ②
2. ① ❸
3. ① ❹
4. ② ❸
5. ② ❹
6. ❸ ❹

Благоприятными для нашего события будут исходы 1 и 6. Отсюда:

$$n=6,\ \ m=2,\ \ P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\ .$$

Третье решение — третий ответ! А можно привести еще и четвертое, в котором пронумерованные шары будут выниматься не одновременно, а друг за другом (запишите его самостоятельно).

Каждое из приведенных решений кажется убедительным. Однако понятно, что, как и в задаче Даламбера, какие-то из них ошибочны — ответы-то получились разные! Причем ошибку надо искать не в вычислениях (они очень простые), а в выбранных моделях. Вслед за Даламбером, мы забыли о том, что при определении равновозможных исходов нужно различать все предметы, участвующие в эксперименте, а не только их цвета. Значит, правильными следует считать только решения 3 и 4 (убедитесь, что четвертое решение даст тот же самый ответ: $P(A)=\frac{1}{3}$).

Если приведенные здесь рассуждения вас все-таки не убедили, советуем воспользоваться самым испытанным способом: взять четыре шара и провести описанный в задаче эксперимент. Повторив его многократно, вы сможете оценить неизвестную вероятность по полученной частоте. Надеемся, что полученный результат будет близок к $\frac{1}{3}$.

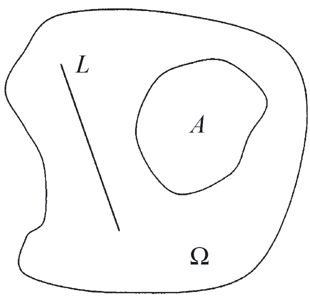
4. Геометрическая вероятность

Итак, в предыдущем разделе мы научились вычислять вероятности событий *в опытах, имеющих конечное число равновозможных исходов*. Для этого не требуется проводить никаких экспериментов — нужно всего лишь правильно посчитать количество всех возможных исходов опыта и количество исходов, благоприятных для данного события.

А как быть, если этих исходов бесконечно много? Такая ситуация возникает в некоторых геометрических задачах, связанных со случайным выбором точки на прямой, плоскости или в пространстве, — вспомните, например, опыт 4 с тетрадным листом и монетой. Формула классической вероятности здесь уже неприменима. Посмотрим, как все же и в этом случае вычислить вероятность без обращения к опыту.

Выберем на географической карте мира случайную точку (например, зажмурим глаза и покажем указкой). Какова вероятность, что эта точка окажется в России? Очевидно, для ответа на вопрос нужно знать, какую часть всей карты занимает Россия. Точнее, какую часть всей площади карты составляет площадь России. Отношение этих площадей и даст искомую вероятность. А какова вероятность попасть при этом в Гринвичский меридиан? Как ни странно, придется положить ее равной нулю, т.к. площадь меридиана равна нулю (это ведь линия, а не фигура: у нее есть только длина). На самом деле ничего странного в этом факте нет — попасть указкой *точно* в меридиан невозможно.

Такую же картину мы имеем и в общем случае, когда в некоторой ограниченной области Ω случайно выбирается точка:



Если предположить, что попадание в любую точку области Ω равновозможно, то вероятность попадания случайной точки в заданное множество A будет равна отношению площадей

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

(через P мы, как и раньше, обозначаем вероятность, а через S — площадь). Если A имеет нулевую площадь, то вероятность попадания в A равна нулю. Например, вероятность попадания на отрезок L будет нулевой. Такое определение вероятности называется **геометрическим.**

Ситуация напоминает классическое определение вероятности: как и там, здесь важна равновозможность всех исходов, т.е. всех точек области. Но теперь число исходов эксперимента бесконечно, поэтому приходится считать не их количество, а занимаемую ими площадь. Точно так же можно определить геометрическую вероятность в пространстве (вместо площадей здесь надо брать объемы тел) и на прямой (а здесь — длины отрезков).

* * *

Теперь самое время вернуться к опыту с тетрадным листом и монетой.

<u>Опыт 4</u>. Напомним, что в этом опыте мы договорились считать множеством исходов $\Omega = \{x\colon 0 \le x \le 4\}$. Если монета бросается на лист наудачу, то все значения x из отрезка [0; 4] будут равновозможными. Значит, вероятности событий

A = {монета пересекла 2 линии} = $\{x\colon 2 < x \le 4\}$;

B = {монета пересекла 3 линии} = $\{x\colon 0 \le x \le 2\}$.

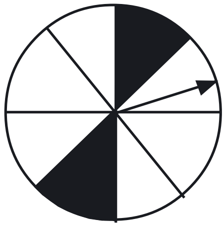
можно найти по формуле геометрической вероятности, поделив длины отрезков [2; 4] и [0; 2] на длину всего отрезка [0; 4]:

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Вероятности событий A и B совершенно неожиданно получились одинаковыми. Но предполагать это с самого начала не было никаких оснований: стоит изменить параметры задачи (расстояние между линейками или размер монеты) — и равновозможность этих событий исчезнет (см. задачу в конце лекции).

А вот в следующем опыте ответ можно найти как с помощью геометрической вероятности, так и по формуле Лапласа.

Опыт 9. Проводится опыт с вертушкой (рулеткой), изображенной на рисунке. В центре вертушки закреплена стрелка, которая раскручивается и останавливается в случайном положении (такую вертушку легко изготовить самому с помощью куска картона, кнопки и английской булавки с «ушком»).



С какой вероятностью стрелка вертушки остановится на черном секторе?

Для ответа на этот вопрос можно либо вычислить площадь черных секторов и разделить ее на площадь всего круга, либо найти суммарную длину дуг, ограничивающих черные секторы, и поделить ее на длину всей окружности. Второй способ лучше отражает суть нашего эксперимента, ведь фактически мы выбираем точку на окружности, в которой остановится острие стрелки. Напомним, что длина дуги находится по формуле

$$L = \alpha R,$$

где α — центральный угол дуги, выраженный в радианах. Отсюда искомая вероятность будет

$$P = \frac{2\frac{\pi}{4}R}{2\pi R} = \frac{1}{4}\cdot$$

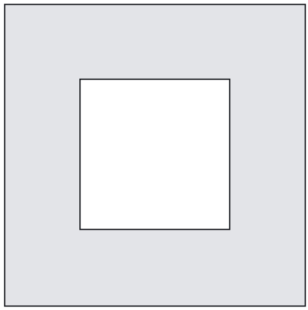
Тот же результат для нашей вертушки можно получить и без привлечения геометрической вероятности. Ведь она поделена на 8 равных (а значит, равновозможных!) секторов, из которых два выкрашены в черный цвет. Отсюда

$$P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\ .$$

Если же секторы, на которые поделена вертушка, сделать неравными, без геометрического определения уже не обойтись.

Опыт 10. В квадрат со стороной 4 см «бросают» точку. Какова вероятность, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата будет меньше 1 см?

Изобразим квадрат со стороной 4 см и закрасим в нем множество точек, удаленных от ближайшей стороны квадрата меньше, чем на 1 см:



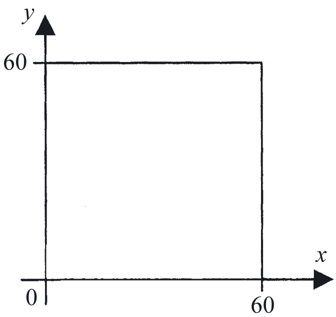
Площадь закрашенной части квадрата составляет 16 см^2 – 4 см^2 = = 12 см^2. Отсюда искомая вероятность будет

$$P = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0,75\ .$$

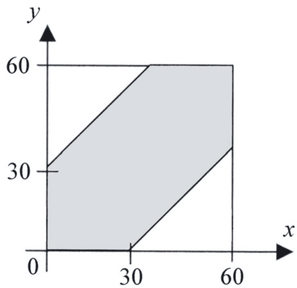
В заключение рассмотрим опыт, который на первый взгляд не имеет отношения к геометрической вероятности.

Опыт 11. Задача о встрече. Коля и Оля договорились встретиться в Центральном парке с 12.00 до 13.00. Пришедший первым ждет другого в течение 30 минут, после чего уходит. Какова вероятность, что они встретятся, если каждый из них с одинаковой вероятностью может прийти в любой момент времени в течение заданного часа?

Обозначим время прихода в парк Коли через x, а Оли — через y (для удобства будем выражать время в минутах, прошедших после 12 часов). Тогда точка с координатами (x, y) будет случайной точкой в квадрате на плоскости Oxy, изображенном на рисунке:



Каждая точка этого квадрата — это один из возможных исходов нашего эксперимента. Эксперимент завершается встречей, если выполняется условие $|x - y| < 30$. Множество таких точек закрашено на следующем рисунке:



Площадь закрашенной части можно найти, вычитая из площади квадрата площади двух равных треугольников:

$$S = 60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 = 3600 - 900 = 2700.$$

Искомую вероятность встречи находим как отношение «благоприятной» площади ко всей площади квадрата:

$$P = \frac{2700}{3600} = \frac{3}{4}.$$

Надо отметить, что равновозможность исходов в геометрической вероятности — дело совсем непростое. Достаточно познакомиться с классическим парадоксом Бертрана, описание которого вы можете найти в литературе (см. например [27]).

Вопросы и задачи

К разделу 1

1. Какие события называются случайными? Приведите примеры.

2. Какие события называются невозможными? достоверными? Приведите примеры.

3. Что такое случайный опыт? Назовите два обязательных условия, которым он должен удовлетворять. Придумайте свой пример случайного опыта.

4. Три сестры — Ольга, Маша и Ирина — тянут жребий, кому из них мыть посуду. Для этого они кладут в шапку три бумажки, на одной из которых нарисован крестик, и по очереди их вытаскивают: Ольга — первой, Маша — второй, Ирина — третьей. Выпишите все возможные исходы этого опыта и найдите их количество.

5. В опыте из задачи 4 запишите множества исходов, из которых состоят случайные события:

A = {посуду будет мыть Ольга};

B = {посуду будет мыть Маша};

C = {посуду будет мыть Ирина}.

К разделу 2

6. Что такое абсолютная частота? относительная частота?

7. Как частота связана с вероятностью?

8. После 100 опытов частота события A оказалась равна 0, а частота события B – 1. Можно ли сказать, что событие A невозможное, а событие B — достоверное?

9. После 1000 испытаний по подбрасыванию монеты разность абсолютных частот «орлов» и «решек» оказалась равна 80. Найдите разность их относительных частот.

10. За последние 100 тиражей лотереи «Спортлото 5 из 36» в 48 тиражах угадывались все 5 номеров. Можно ли утверждать, что вероятность угадать 5 номеров из 36 приблизительно равна $\frac{1}{2}$?

К разделу 3

11. Пусть вам требуется оценить вероятность каждого из возможных исходов в опытах по подбрасыванию: а) монеты; б) кнопки; в) кубика; г) двух монет; д) двух кнопок; е) двух кубиков. В каких из этих ситуаций вы готовы дать ответ, не проводя эксперимента?

12. Ученик хочет определить, с какой вероятностью при бросании двух кубиков можно получить сумму в 12 очков. Он рассуждает так: сумма очков на двух кубиках может равняться любому числу от 2 до 12; поскольку кубики симметричные, то все 11 значений суммы равновозможны, следовательно, искомая вероятность будет $\frac{1}{11}$. Прав ли ученик?

13. Какова вероятность, что у случайно выбранного жителя Земли день рождения приходится на а) 1 января; б) 28 февраля; в) 29 февраля?

14. Задача Эйлера. Три господина пришли в ресторан в одинаковых шляпах и сдали их в гардероб. С какой вероятностью каждый из них уйдет в своей шляпе, если они будут выбирать их наугад? С какой вероятностью каждый уйдет в чужой шляпе?

15. В шкафу находится 4 пары ботинок с 42-го по 45-й размеры. Из них случайно выбирают два ботинка. С какой вероятностью они окажутся парными?

<u>К разделу 4</u>

16. В квадрате со стороной 10 см наугад выбирается точка. С какой вероятностью расстояние от этой точки до центра квадрата будет: а) меньше 5 см? б) равно 5 см? в) больше 5 см?

17. Пятирублевую монету, диаметр которой 25 мм, бросают наугад на тетрадный лист в линейку (расстояние между линейками 8 мм). Какое число линий может пересечь монета? С какими вероятностями?

18. На окружности радиуса R случайно выбирают две точки. С какой вероятностью расстояние между ними будет меньше R?

19. Оконная решетка состоит из клеток со стороной 20 см. Какова вероятность того, что попавший в окно мяч пролетит через решетку, не задев ее, если радиус мяча равен: а) 10 см; б) 5 см.

20. В решетку из предыдущей задачи 100 раз бросали наугад один и тот же мяч. В 50 случаях он пролетел через решетку, не задев ее. Оцените приближенно радиус мяча.

21. Стержень случайным образом ломают на три части. С какой вероятностью из них можно составить треугольник?

Методические замечания

Методические замечания к этой и последующим лекциям мы будем начинать с напоминания об обязательном минимуме содержания образования по соответствующей теме, записанном в новых стандартах школьного математического образования.

Основная школа. Понятие и примеры случайных событий. Частота события, вероятность. Равновозможные события и подсчет их вероятности. Представление о геометрической вероятности.

Старшая школа. Элементарные и сложные события. Вероятность и статистическая частота наступления события. Решение практических задач с применением вероятностных методов. Поочередный и одновременный выбор нескольких элементов из конечного множества.

К разделу 1

Знакомство с вероятностно-статистическим материалом начинается с трех важнейших понятий, предваряющих определение вероятности: *случайный опыт*, *случайное событие*, *элементарный исход*.

Авторы [1], [2] начинают знакомство со случайными событиями уже в 5-м классе, справедливо полагая, что в этом возрасте закладываются основы вероятностной интуиции, позволяющие впоследствии усвоить формальные методы вычисления вероятностей. В этот период ученик должен получить общее представление о случайном событии, научиться выделять *невозможные* и *достоверные* события.

На более позднем этапе, в 6–7-х классах, появляется понятие случайного эксперимента, в контексте которого рассматривается любое случайное событие. Одновременно с этим возникает представление о его возможных исходах. Первоначальное знакомство с этими понятиями происходит на нематематическом языке, поэтому главной задачей учителя является разъяснение их существенных признаков, о которых в основном и идет речь в первом разделе нашей лекции. В результате знакомства с этими понятиями ученик должен научиться различать случайные и неслучайные опыты; отличать *элементарные* события (исходы) от *неэлементарных*.

Особое внимание следует уделить обсуждению «элементарности» исходов, поскольку непонимание этого признака повлечет дальше неизбежные ошибки при вычислении вероятностей.

Принципиальным моментом этого раздела является переход от словесного описания событий и экспериментов к *теоретико-множествен-*

ному. Включение элементарных понятий из теории множеств в обязательный минимум школьного образования делает такой переход не только возможным, но и крайне полезным как для самой теории вероятностей, так и для дальнейшего закрепления основных теоретико-множественных понятий и операций. На этом этапе ученики должны уметь:

• перечислять все возможные (в случае их большого количества — некоторые) исходы опыта, используя для этого их естественные обозначения;

• строить по словесному описанию события соответствующее множество благоприятных исходов;

• переходить от события, представленного в виде множества исходов, к его словесному описанию (понимая, что такой переход неоднозначен).

При рассмотрении примеров случайных опытов полезно рассматривать различные способы *кодирования* элементарных исходов; обсуждать, какие из них наиболее удобны и экономичны.

<u>К разделу 2</u>

Принципиальным новшеством, отличающим методическую систему авторов [1], [2] от предшествующих попыток ввести элементы теории вероятностей в общеобразовательной школе, было главенство *частотного* (а не аксиоматического или классического) подхода к определению вероятности. Сегодня с таким подходом согласно большинство авторов, пишущих для школы. Таким образом, универсальное определение вероятности как числа, к которому приближается относительная частота случайного события в длинной серии опытов, представляется, несмотря на все свои недостатки, единственно правильным.

При этом классический и геометрический подход к определению вероятности должны рассматриваться как частные случаи вероятностных моделей, в которых это число удается вычислить (предсказать) *без проведения опыта*. Таким образом, вероятность появляется как универсальная количественная мера возможности осуществления случайных событий, а все частные формулы для ее подсчета служат лишь для вычисления этой меры в определенном круге ситуаций.

Такое введение вероятности требует предварительного (и достаточно подробного) знакомства учащихся с понятиями *абсолютной* и *относительной частоты*, изучения статистического материала, полученного как самостоятельно (бросание монеты, кубика, кнопки, опыты с шарами, вертушками и т.д.), так и предоставленного учителем. Наблюдение за реальной стабилизацией относительных частот играет, на наш взгляд, не менее важную роль в развитии вероятностного мышления и интуиции, чем получение комбинаторных навыков.

При изучении этого раздела полезным может оказаться урок в форме *лабораторной работы*, связанной с проведением случайных экспериментов и обработкой полученных результатов (в идеале — компьютерной). На диске [5], уже получившем распространение в школьной практике, имеется специализированное программное обеспечение, позволяющее в считанные секунды смоделировать тысячи случайных экспериментов, наблюдая при этом за динамикой изменения частот и их приближением к вероятностям случайных исходов и событий.

Заканчивается раздел рассмотрением двух важнейших для дальнейшего свойств частот и вероятностей:

• сумма относительных частот (вероятностей) всех элементарных исходов опыта равна 1;

• относительная частота (вероятность) любого события равна сумме частот (вероятностей) благоприятных для него исходов.

При этом для частот эти свойства выполняются с очевидностью, а на вероятность они переносятся в результате «предельного перехода».

<u>К разделу 3</u>

То что вероятность любого события может быть найдена как сумма вероятностей благоприятных исходов, автоматически подводит нас к вопросу — а как вычислить вероятности самих исходов? Можно ли сделать это, минуя опыт?

Несколько хорошо знакомых примеров — монета, кубик — наведут учеников на идею *опыта с равновозможными исходами*. После этого они вполне способны самостоятельно открыть формулу Лапласа: $P(A) = \frac{m}{n}$. Именно с этой формулы начинается решение по-настоящему интересных задач.

К сожалению, авторы многих учебников, приводя формулу Лапласа, забывают лишний раз напомнить об условиях ее применимости: *опыт должен иметь конечное число равновозможных исходов*. Именно с этого следует начинать решение любой задачи, связанной с использованием данной формулы. Чрезвычайно полезными здесь оказываются примеры, в которых исходы опыта либо неравновозможны по свой сути (кнопка, пуговица, кубик со смещенным центром тяжести и т.д.), либо в качестве исходов ошибочно рассматриваются неравновозможные события (опыты 7 и 8 из этого раздела).

В качестве испытанного на практике рабочего «инструмента» можем предложить следующую *общую схему решения задач на классическую вероятность*:

1. Описание возможных исходов опыта, их кодирование и перечисление (полное или частичное).

2. Обоснование равновозможности перечисленных исходов (здесь можно опираться на симметрию самого объекта, участвующего в опыте; использовать прямые указания в тексте задачи: «случайно», «наугад», «не глядя» и т.д.).

3. Подсчет общего числа исходов опыта n (на первом этапе — прямой подсчет; позже — использование комбинаторных правил и формул).

4. Описание благоприятных для события A исходов, их перечисление (полное или частичное). Если все исходы уже выписаны, то можно просто отметить среди них благоприятные для A.

5. Подсчет числа благоприятных для события A исходов m.

6. Вычисление вероятности по формуле $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

7. Оценка и интерпретация полученного результата.

Обратите внимание, что первые три пункта касаются только случайного эксперимента и никак не связаны со случайным событием A.

Нуждается в комментариях последний, седьмой, пункт приведенной схемы. Получив ответ, необходимо обсудить с учениками его реальный смысл, привести частотную интерпретацию. Полезно выяснить, совпадает ли полученная величина с интуитивным представлением учеников о вероятности; удовлетворяет ли основным свойствам и т.д. Использование на уроках электронного пособия [5] позволяет организовать самостоятельную проверку полученных результатов через проведение *виртуального эксперимента* и сравнение вычисленной вероятности с полученной в опыте частотой. Такая проверка важна как с содержательной, так и с методической точки зрения: закрепляя понятие о вероятности как предельном значении частоты с одной стороны, она создает дополнительную мотивацию для изучения методов ее расчета с другой.

К разделу 4

Геометрическая модель вероятности, несмотря на кажущуюся простоту и естественность, вызывает неизменные трудности у учащихся. Их источник легко объяснить — переход от *конечного множества возможных исходов эксперимента к бесконечному* (да еще несчетному!).

При введении самого понятия геометрической вероятности мы неизменно оказываемся перед вопросом: каким образом из точек, имеющих нулевую вероятность, складывается область ненулевой вероятности.[3] Почему в этом случае не работает основное свойство вероятности, полученное в разделе 1 — аддитивность? «Научный» ответ на этот вопрос заключается в следующем: вероятность обладает свойством (не пугайтесь) σ-аддитивности. Это означает, что вероятность случайного события будет равна сумме вероятностей благоприятных для него исходов лишь в том случае, если этих исходов *конечное или счетное число*. А отрезок или плоская область состоит, как известно, из несчетного множества точек.

Однако как при этом ответить на вполне правомерный вопрос ученика: «Если вероятность попасть в любую точку области равна 0, как же мы все-таки туда попадаем?». На самом деле, на это есть вполне понятный и обоснованный ответ. Мы знаем, что если событие A невозможно, то $P(A) = 0$. Но обратное утверждение неверно: *из $P(A) = 0$ еще не следует, что событие A невозможно*. Ничто не мешает ему осуществиться в одном или нескольких опытах — его относительная частота при этом все равно будет стремиться к 0. Таким образом, события нулевой вероятности вполне могут происходить в единичных опытах.

Выбравшись таким образом из затруднений философского плана, мы сталкиваемся с более приземленными, но не менее серьезными, возникающими при решении задач. Первая из них — *описание множества возможных исходов*. В задачах на геометрическую вероятность это множество далеко не так очевидно, как в задачах на классическое определение. Поэтому начинать следует с задач, в которых явно констатируется случайный выбор точки в некоторой области (опыт 10). Затем от точек переходить к реальным объектам (опыт 4). И, наконец, заканчивать задачами, где геометрия скрыта в некоторой реальной ситуации (опыт 11).

[3] «– Сколько стоит одна капля сока? — Нисколько. — Ну, накапайте стаканчик…»

Типичная ошибка при решении задач на геометрическую вероятность — *несоответствие размерностей*. Часто при вычислении геометрической вероятности длину делят на площадь или площадь на объем. В таких случаях полезно проверять полученную формулу для вероятности на «безразмерность».

Перечисленные трудности рассматриваемой темы, как нам кажется, с лихвой окупаются интересными задачами и их связью со всеми разделами математики — геометрией, алгеброй, математическим анализом. Соответствующие примеры есть в тексте лекции и заданиях для самостоятельного решения.

Лекция 2
Комбинаторика и вероятность

В этой лекции мы займемся комбинаторикой — наукой о составлении и подсчете комбинаций — и выясним, как она связана с подсчетом вероятностей.

1. Правила сложения и умножения. Перечисление комбинаций. Лексикографический порядок

Слово «комбинаторика» происходит от латинского *combino* — соединяю. Действительно, при получении любой комбинации мы составляем ее из отдельных элементов, последовательно соединяя их друг с другом. Чаще всего эти элементы выбираются из некоторого конечного множества.

Подсчитать общее число возможных комбинаций в этом случае помогает одно из важнейших правил комбинаторики — **правило умножения**. Сформулируем его для начала в простейшем случае: если первый элемент в комбинации можно выбрать a способами, после чего второй элемент — b способами, то общее число комбинаций из двух элементов будет $a \cdot b$.

Пример 1. Подсчитаем количество двузначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3. На первое место цифру можно выбрать тремя способами, после чего на второе место — тоже тремя способами. Значит, всего таких чисел по правилу умножения будет

$$3 \cdot 3 = 9.$$

Можно проверить ответ, выписав друг за другом все эти числа в порядке возрастания:

$$11,\ 12,\ 13;$$

$$21,\ 22,\ 23;$$

$$31,\ 32,\ 33.$$

Видно, что они разбились на три группы по три числа в каждой — отсюда и правило умножения при подсчете таких комбинаций.

В приведенном примере слова «после чего», которые используются в формулировке правила умножения, ничего не значат, поскольку выбор второй цифры никак не связан с выбором первой. Но это далеко не всегда так.

Пример 2. Подсчитаем количество двузначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3 так, чтобы все цифры были различны. На первое место цифру можно выбрать тремя способами, после чего на второе место — только двумя способами (ту цифру, которая на первом месте, использовать уже нельзя!). Значит, всего таких чисел по правилу умножения будет $3 \cdot 2 = 6$. Вот эти числа:

12, 13;

21, 23;

31, 32.

Теперь в каждой из трех групп только по два элемента.

* * *

Но бывают задачи, в которых после выбора одного из a объектов в качестве первого элемента комбинации нельзя однозначно сказать, сколькими способами можно выбрать второй элемент — это зависит от того, какой именно объект был выбран первым. Рассмотрим такую ситуацию на примере.

Пример 3. Подсчитаем количество двузначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3 так, чтобы первая цифра была меньше второй. На первое место цифру можно выбрать тремя способами, а вот на второе место после этого:

– двумя способами, если первой цифрой была выбрана 1;
– одним способом, если 2;
– нулем способов, если 3.

Приходится применять комбинаторное **правило сложения**: разбить все комбинации на непересекающиеся классы, подсчитать количество комбинаций в каждом классе (например, по правилу умножения), а затем сложить эти количества. Правило кажется настолько простым и очевидным, что его даже неудобно называть правилом. Однако использование этой простой идеи — «разделяй (на классы) и властвуй» — оказывается чрезвычайно полезным при решении задач.

* * *

Вернемся теперь к правилу умножения и сформулируем его еще раз уже в более общем виде: если нам нужно сформировать комбинацию из

k элементов и при этом первый элемент в комбинации можно выбрать n_1 способами, после чего второй элемент — n_2 способами, после чего третий — n_3 способами и так далее, то всего таких комбинаций будет

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_3.$$

А теперь применим это правило к решению задачи.

Пример 4. В компьютере каждый символ (буква, цифра, специальный знак) кодируется последовательностью из восьми 0 и 1, например:

– 01000110 — код буквы «F»;

– 00110010 — код цифры «2» и т.д.

Сколько различных символов можно закодировать таким образом? Другими словами, сколько существует различных двоичных кодов длины 8?

Выстраивая комбинацию из восьми нулей и единиц, мы можем выбрать первую цифру двумя способами, после чего вторую цифру — тоже двумя способами и т.д. Всего получаем $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^8 = 256$ комбинаций. Именно столько символов содержит так называемая таблица ASCII, давно ставшая стандартом для представления символов в памяти компьютера (сейчас ей на смену пришли более длинные 16-разрядные коды, позволяющие кодировать уже $2^{16} = 65536$ различных символов).

Выписывать все 256 комбинаций мы здесь не будем, напишем только начало и конец этой последовательности:

00000000;

00000001;

00000010;

…

11111110;

11111111.

В предыдущих примерах при выписывании комбинаций мы не задумывались, в каком порядке они перечислялись: комбинаций было мало, они и так были все «на виду». Теперь этот порядок необходим, поскольку иначе мы рискуем потерять какие-то из комбинаций или выписать некоторые из них повторно.

Самый естественный порядок, который можно установить на комбинациях, называется **лексикографическим**. За этим устрашающим словом стоит очень простой принцип упорядочивания: сначала сравниваются первые элементы комбинаций; если они совпадают, то сравниваются вторые, и так далее до первой пары несовпадающих элементов. Та комбинация, у которой этот элемент меньше, считается меньшей. Если сравнение элементов оборвалось из-за того, что одна из комбинаций оказалась короче, то она также считается меньшей. Именно так упорядочиваются слова в словаре — отсюда и название способа — «лексикографический». Иногда удобное начинать сравнение элементов не с начала, а с конца комбинации, и упорядочивать комбинации не по возрастанию, а по убыванию соответствующих элементов. Полученный в результате такого сравнения порядок называется антилексикографическим, но мы им пользоваться не будем.

Отметим еще, что при сравнении комбинаций мы предполагаем, что порядок уже установлен на элементах, из которых строится комбинация. Когда элементами являются цифры, числа, буквы, — это действительно так. Если же никакого естественного порядка на самих элементах нет (например, объекты — это люди или цвета), то мы может установить его сами.

После всего сказанного попробуйте ответить на вопрос: какая комбинация в последовательности кодов из последнего примера следует за комбинацией 00101111? А какая предшествует ей?

Еще один пример иллюстрирует применение двух комбинаторных правил — умножения и сложения — вместе.

Пример 5. Сколькими способами можно посадить шестерых школьников на скамейку так, чтобы Коля и Оля оказались рядом?

Будем считать, что на скамейке 6 пустых мест. Посадить на одно из них Колю можно шестью различными способами, после чего посадить рядом с ним Олю можно… одним или двумя различными способами. Это зависит от того, куда мы посадили Колю — на крайнее место или нет. Самое время применить правило сложения. Разобьем все искомые комбинации на два класса:

1-й класс: Коля сидит на краю, Оля рядом с ним;

2-й класс: Коля сидит где-то в середине, Оля рядом с ним.

Заметим, что эти классы действительно не пересекаются и исчерпывают все комбинации — ведь, в конце концов, Коля сидит либо на краю, либо где-то в середине. Посчитаем число комбинаций в 1-ом классе: место с краю для Коли можно выбрать двумя способами, после чего Олю можно посадить рядом с ним только одним способом, после чего оставшиеся 4 места можно занять $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ способами. Значит, в этом классе будет

$$2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48 \text{ комбинаций.}$$

Посчитаем число исходов во 2-ом классе: место в середине скамейки для Коли можно выбрать четырьмя способами, после чего Олю можно посадить рядом с ним двумя способами, после чего оставшиеся 4 места можно занять $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ способами. Значит, в этом классе будет

$$4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 192 \text{ комбинации.}$$

Итого по правилу сложения 48 + 192 = 240 способов. Попробуйте выписать часть из них в лексикографическом порядке.

2. Перестановки и размещения. Факториал

В комбинаторике принято каждому виду комбинаций давать специальное название. Сейчас мы познакомимся с двумя такими видами — перестановками и размещениями.

Перестановкой из n элементов называется комбинация, в которой все эти n элементов расположены в определенном порядке. Таким образом, перестановки отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Пример 1. Вот все перестановки из букв A, B, C, выписанные в лексикографическом порядке:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA.

Размещением из n элементов по k называется комбинация, в которой какие-то k из этих n элементов расположены в определенном порядке. Таким образом, размещения отличаются друг от друга не только порядком расположения элементов, но и тем, какие именно k элементов выбраны в комбинацию.

Пример 2. Вот все размещения из букв A, B, C по 2:

AB, BA, AC, CA, BC, CA.

* * *

С помощью правила умножения легко вычисляются количества перестановок и размещений. Найдем эти количества.

При формировании перестановки из n элементов первый элемент можно выбрать n способами, после чего второй элемент — $(n-1)$ способами (так как один элемент уже выбран), после чего третий элемент — $(n-2)$ способами и так далее. Всего получаем

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

перестановок. Полученное количество — произведение натуральных чисел от 1 до n — в математике называется **факториалом** числа n и обозначается $n!$. Отметим одну важную особенность этой замечательной функции — ее быстрый рост. Приведем для примера несколько значений факториала для возрастающих значений n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040

8	9	10	11	12	13
40 320	362 880	3 628 800	39 916 800	479 001 600	6 227 020 800

Отметим также, что для удобства полагают $0! = 1$.

Теперь найдем количество размещений из n элементов по k. Первый элемент в размещении можно выбрать n способами, после чего второй элемент — $(n-1)$ способами (так как один элемент уже выбран), после чего третий элемент — $(n-2)$ способами и так далее. Пока все, как в перестановке. Только такой выбор будет делаться не n раз, а только k, поэтому по правилу произведения получим

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

размещений (в этом произведении как раз k сомножителей). Это произведение можно «свернуть» в дробь с использованием факториалов:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Найденные нами количества перестановок и размещений имеют в комбинаторике специальные обозначения — P_n и A_n^k соответственно (читаются как «пэ из эн» и «а из эн по ка»). С использованием этих обозначений выведенные формулы для числа перестановок и размещений запишутся так:

$$P_n = n!,$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

А теперь решим с помощью этих формул несколько задач.

Пример 3. Сколькими способами можно расставить на книжной полке собрание сочинений Диккенса, включающее 30 томов? Каждый такой способ — это перестановка из 30 элементов. Всего таких перестановок будет

$$P_{30} = 30! = 265\,252\,859\,812\,191\,058\,636\,308\,480\,000\,000.$$

Пример 4. На книжную полку влезает только 8 любых томов из 30-томного собрания Диккенса. Сколькими способами можно заполнить этими томами такую полку? Каждый способ — это размещение из 30 элементов по 8. Всего таких размещений будет

$$A_{30}^8 = \frac{30!}{(30-8)!} = \frac{30!}{22!} = 235\,989\,936\,000.$$

* * *

Поскольку число перестановок быстро растет с ростом N, то выписывать их вручную даже для небольших N дело безнадежное. Но интересно решить другую задачу. Будем считать, что на перестановках установлен лексикографический порядок. Рассмотрим какую-нибудь перестановку из чисел от 1 до 7:

1 6 7 3 5 4 2.

Какая перестановка будет следовать непосредственно за ней? Чтобы найти такую перестановку, нужно *увеличить как можно более далекие от ее начала элементы на как можно меньшую величину*. Начнем с последнего элемента и будем двигаться от конца к началу перестановки.

- Можно ли увеличить 2, не изменяя предыдущие элементы? Нет.
- Можно ли увеличить 4, не изменяя предыдущие элементы? Нет.
- Можно ли увеличить 5, не изменяя предыдущие элементы? Нет.
- Можно ли увеличить 3, не изменяя предыдущие элементы? Да, поскольку после 3 в этой перестановке есть элементы, большие 3. Наименьший из этих элементов — 4.

Заменяем 3 на 4. Оставшиеся элементы выписываем по возрастанию:

1 6 7 4 2 3 5.

Это будет перестановкой, которая следует непосредственно за исходной в лексикографическом порядке.

3. Сочетания

Поскольку мы уже рассмотрели комбинаторные правила умножения и сложения, естественно ожидать, что есть аналогичные правила с делением и вычитанием.

Это действительно так, хотя их не всегда формулируют в таком явном виде, как правило умножения. Это скорее не правила, а некоторые общие принципы для подсчета комбинаций. Итак, **правило вычитания**: при подсчете комбинаций, обладающих заданным свойством, иногда проще найти количество комбинаций, которые этим свойством НЕ обладают, и вычесть его из общего количества комбинаций.

Пример 1. Найдите количество трехзначных чисел, в записи которых есть хотя бы один 0. Воспользуемся правилом вычитания. Сначала найдем количество всех трехзначных чисел — это можно сделать и без всякой комбинаторики — их будет $999 - 99 = 900$. Теперь найдем, сколько из них не содержат ни одного 0: на первое место можно поставить любую из девяти цифр, на второе — любую из девяти цифр и на третье — любую из девяти цифр (каждый раз исключаем 0). Всего по правилу умножения будет $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ вариантов. А теперь найдем ответ по правилу вычитания:

$900 - 729 = 171$ — столько трехзначных чисел содержат хотя бы один 0.

Теперь сформулируем **правило деления**: если при подсчете искомых комбинаций мы каждую из них посчитали m раз, то нужно поделить найденное количество комбинаций на m. Формулировка кажется довольно странной — зачем считать каждую из комбинаций по несколько раз? Но из примеров сейчас все будет ясно.

Пример 2. Из класса, в котором учится 25 учеников, нужно выбрать троих для участия в школьной олимпиаде. Сколькими способами можно это сделать?

Первого ученика можно выбрать 25 способами, после чего второго ученика — 24, после чего третьего — 23. Всего по правилу умножения получится $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\ 800$ способов. Но это еще не ответ! Дело в том, что при таком подсчете мы считали каждый искомый вариант по несколько раз: скажем, вариант, в котором на олимпиаду отправляются Иванов, Петров и Сидоров встречался в виде комбинаций:

- Иванов — Петров — Сидоров;
- Иванов — Сидоров — Петров;
- Петров — Иванов — Сидоров;
- Петров — Сидоров — Иванов;
- Сидоров — Иванов — Петров;
- Сидоров — Петров — Иванов;

то есть в виде шести различных размещений. Легко понять, что любой другой вариант считался тоже шесть раз: именно столько перестановок можно составить из трех выбранных учеников. Для получения ответа воспользуемся правилом деления: разделим найденное количество вариантов на 6:

$13800 : 6 = 2300$ — столько способов выбрать трех учеников из 25.

В последнем примере мы столкнулись еще с одним важнейшим типом комбинаций, часто использующемся в комбинаторике — сочетаниями. **Сочетанием** из n элементов по k называется комбинация, в которой из этих n элементов выбраны любые k без учета их порядка в комбинации. Таким образом, для сочетания имеет значение только состав выбранных предметов, а не их порядок. Другими словами, сочетание — не что иное, как любое k-элементное подмножество n-элементного множества.

<u>Пример 3</u>. Вот все сочетания из букв А, В, С по две:

[АВ], [АС], [ВС].

Квадратные скобки использованы здесь специально для того, чтобы показать, что порядок следования элементов в комбинации не имеет значения, т.е. [АВ] = [ВА]. Такое обозначение часто используется в математической литературе.

* * *

Формулу для числа сочетаний мы выведем из формулы для числа размещений с помощью правила деления. При подсчете размещений из n по k мы считали число способов, которым можно выбрать k предметов из n с учетом их порядка. Каждое сочетание учитывалось при этом столько раз, сколько существует способов упорядочить выбранные k предметов, т.е. $k!$ раз. По правилу деления, чтобы найти число сочетаний, нужно поделить число размещений на $k!$:

$$\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}.$$

Найденное количество сочетаний имеет в комбинаторике специальное обозначение — C_n^k (читается как «цэ из эн по ка»). С использованием этого обозначения выведенная формула запишется так:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}.$$

А теперь решим с ее помощью несколько задач.

Пример 4. Из колоды, в которой 36 карт, выбирают 6 карт. Сколькими способами можно это сделать? Каждая интересующая нас комбинация — это сочетание из 36 по 6. Всего таких сочетаний будет

$$C_{36}^6 = \frac{36!}{30!\cdot 6!} = \frac{36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 1\,947\,792.$$

* * *

Часто при подсчете комбинаций приходится применять формулы для числа сочетаний вместе с правилом умножения.

Пример 5. Из колоды, в которой 36 карт, выбирают 6 карт. Сколько способов сделать это так, чтобы среди них оказалось 2 туза?

Для получения любой интересующей нас комбинации нужно сначала выбрать любые 2 туза из 4, после чего выбрать любые 4 карты из 32 «нетузов». Первое действие можно осуществить

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6 \text{ способами,}$$

после чего второе действие –

$$C_{32}^4 = \frac{32!}{28!\cdot 4!} = \frac{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 35\,960 \text{ способами.}$$

По правилу умножения общее число способов будет

$$C_4^2 \cdot C_{32}^4 = 6 \cdot 35960 = 215\,760\ .$$

Можно обобщить вопрос, заданный в условии приведенной задачи, и найти количество способов, при которых среди выбранных шести карт окажется 0, 1, 2, 3, 4 туза:

Кол-во тузов	Число способов
0	$C_4^0 \cdot C_{32}^6 = 906\,192$
1	$C_4^1 \cdot C_{32}^5 = 805\,504$
2	$C_4^2 \cdot C_{32}^4 = 215\,760$
3	$C_4^3 \cdot C_{32}^3 = 19\,840$
4	$C_4^4 \cdot C_{32}^2 = 496$

Не всегда в задачах, где следует применять формулу для подсчета сочетаний, в явном виде присутствует выбор из n по k. Иногда этот выбор скрыт в тексте, и его нужно еще увидеть.

Пример 6. Сколькими способами можно расположить в один ряд 3 белых и 4 черных шара? Чтобы было понятно, о каких комбинациях идет речь, выпишем несколько из них, обозначая белые шары буквой Б, черные — буквой Ч:

БББЧЧЧЧ, ББЧБЧЧЧ, ББЧЧБЧЧ, …

Если считать, что Б < Ч, то эти комбинации выписаны в лексикографическом порядке.

Нужно сказать, что полученные комбинации не совпадают ни с одним из рассмотренных ранее типов (перестановка, размещение, сочетание), но для их подсчета наших знаний вполне достаточно. Каждая комбинация состоит из семи букв и однозначно определяется выбором тех трех из семи мест, на которых будут стоять буквы Б. Выбрать три места из семи можно $C_7^3 = \frac{7!}{4!3!} = 35$ способами — это и есть искомое количество комбинаций.

Задачу можно решать и по-другому, выбирая те четыре из семи мест, на которых будут стоять буквы Ч: $C_7^4 = \dfrac{7!}{3!\cdot 3!} = 35$. Разумеется, ответ тот же самый. Кроме того, мы обнаружили одно интересное свойство числа сочетаний:

$$C_n^k = C_n^{n-k}\ .$$

Это свойство сразу следует из формулы для числа сочетаний — формула симметрична относительно k и $(n - k)$. Но обосновать это равенство можно чисто комбинаторным способом: выбор тех k элементов из n, которые мы собираемся включить в комбинацию, равносилен выбору тех $(n - k)$ элементов, которые мы собираемся оставить.

Найденное замечательное свойство числа сочетаний далеко не единственное. В следующем пункте мы поговорим об этих свойствах подробнее.

4. Комбинаторика при вычислении вероятностей

Перейдем теперь к использованию полученных сведений из комбинаторики для решения вероятностных задач. Сначала зададимся вопросом, какая вообще может быть связь между комбинаторикой, где все жестко определено и детерминировано, и теорией вероятностей, изучающей случайные явления? В первой лекции, обсуждая понятие вероятности, мы выяснили, что существует довольно широкий круг случайных опытов, в которых вероятность любого события можно вычислить *a priory* — без проведения экспериментов — по **формуле классической вероятности**

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где n — количество всех исходов опыта, а m — количество исходов, благоприятных для события A. Это так называемые **опыты с равновозможными исходами**.

Рассматривая примеры таких опытов, мы специально выбирали их достаточно простыми, чтобы при подсчете числа возможных и благоприятных исходов можно было провести этот подсчет простым перечислением всех вариантов. Однако зачастую количество исходов опыта настолько велико, что перечислить все такие исходы не представляется возможным. Вот здесь и приходят на помощь комбинаторные правила и формулы, рассмотренные выше. Чаще всего это происходит в опытах, где либо участвует много объектов (монет, кубиков, шаров и т.д.), либо с одним и тем же объектом производят многократные действия (монету или кубик бросают несколько раз, несколько раз участвуют в лотерее и т.д.).

Еще раз подчеркнем, что для использования комбинаторных методов пригодны только те задачи, в основе которых лежат опыты с равновозможными исходами — иначе подсчет количества таких исходов ничего не дает для вычисления вероятности. Начнем с примеров, уже разобранных в предыдущих разделах. Только теперь в каждом из них создадим вероятностную ситуацию.

Пример 1 (см. пример 1.5). Шесть школьников случайным образом рассаживаются на скамейку. С какой вероятностью Коля и Оля будут сидеть рядом?

Фразу «рассаживаются случайным образом» нужно понимать так, что все возможные варианты рассаживания равновозможны. Каждый такой вариант — это перестановка из 6 элементов, значит, всего возможных исходов у этого опыта будет

$$n = P_6 = 6!\,.$$

Исходы, благоприятные для события «Коля и Оля будут сидеть рядом» мы уже считали ранее — их получилось $m = 240$. Отсюда находим вероятность:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{240}{6!} = \frac{1}{3}\,.$$

Пример 2 (см. пример 3.2). В классе, в котором учится 25 учеников, разыгрывают по жребию 3 билета в цирк. С какой вероятностью в цирк пойдут Ира, Маша и Оля?

Фраза «разыгрывают по жребию 3 билета» говорит о том, что любые три человека из класса могут попасть в цирк с равной вероятностью (т.е. жребий справедливый). Каждый вариант жеребьевки — это сочетание из 25 по 3; всего таких вариантов

$$n = C_{25}^3 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2300\,.$$

Благоприятный исход всего один — это единственное сочетание Ира-Маша-Оля. Отсюда искомая вероятность будет

$$P(A)=\frac{1}{2300}\approx 0{,}0004\,.$$

<u>Пример 3</u>. (см. примеры 3.4 и 3.5) Из колоды, в которой 36 карт, случайно выбирают 6 карт. С какой вероятностью среди них нет ни одного туза? один туз? два туза? три туза? четыре туза?

Фраза «случайно выбирают» говорит о том, что все C_{36}^{6} исходов этого опыта равновозможны. Благоприятные исходы для каждого из перечисленных в условии задачи событий мы уже считали. Остается подставить эти данные в формулу для вычисления вероятности:

$$P(A_0)=\frac{C_4^0\cdot C_{32}^6}{C_{36}^6}=\frac{4!}{4!\cdot 0!}\cdot\frac{32!}{26!\cdot 6!}\cdot\frac{30!\cdot 6!}{36!}=\frac{32!\cdot 30!}{26!\cdot 36!}=\frac{27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{33\cdot 34\cdot 35\cdot 36}\approx 0{,}465;$$

$$P(A_1)=\frac{C_4^1\cdot C_{32}^5}{C_{36}^6}\approx 0{,}414\,;$$

$$P(A_2)=\frac{C_4^2\cdot C_{32}^4}{C_{36}^6}\approx 0{,}111\,;$$

$$P(A_3)=\frac{C_4^3\cdot C_{32}^3}{C_{36}^6}\approx 0{,}010\,;$$

$$P(A_4)=\frac{C_4^4\cdot C_{32}^2}{C_{36}^6}=0{,}00026\,.$$

Мы подробно выписали процесс вычисления $P(A_0)$, чтобы показать, что не нужно торопиться сразу вычислять все значения C_n^k — многие факториалы могут сократиться (хотя бы частично) еще до их вычисления. Отметим еще, что сумма найденных вероятностей должна равняться единице, поскольку события $A_0, A_1, ..., A_4$ не пересекаются и исчерпывают все возможные варианты данного опыта (о таких событиях мы подробнее поговорим в следующей лекции). У нас ровно 1 не получится — это связано с округлением найденных вероятностей.

Пример 4 (см. пример 3.6). 3 белых и 4 черных шара случайным образом раскладывают в ряд. С какой вероятностью цвета шаров будут чередоваться?

Мы уже считали общее количество способов, которыми можно расположить в один ряд 3 белых и 4 черных шара — их получилось $C_7^3 = \dfrac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$. При этом цвета будут чередоваться только в одном из этих способов, а именно:

ЧБЧБЧБЧ.

Значит, искомая вероятность равна $\dfrac{1}{35}$.

Вообще говоря, следуя советам, изложенным в лекции 1, следовало бы решать эту задачу несколько иначе. При раскладывании шаров не имеют никакого значения их цвета; важно только, что этих шаров 7 штук, поэтому равновозможными исходами опыта будут 7! перестановок, которые можно составить из 7 шаров.

Чтобы найти количество благоприятных исходов, нужно посчитать, для скольких перестановок цвета чередуются в следующем порядке: ЧБЧБЧБЧ. Четыре черных шара можно разместить на отмеченных для них местах 4! способами, после чего разместить на трех оставшихся местах три белых шара можно 3! способами. Таким образом, всего благоприятных исходов по правилу умножения будет 4! · 3! Искомая вероятность будет

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4! \cdot 3!}{7!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{1}{35}.$$

Получили тот же ответ.

Пример 5. Какова вероятность, что при подбрасывании 10 монет «орлов» выпадет больше, чем «решек»? Помня о том, что при рассмотрении возможных исходов этого опыта нужно различать все 10 монет (см. лекцию 1), найдем общее количество исходов: для первой монеты возможны два варианта («орел» и «решка»), для второй — тоже два и т.д. Всего исходов по правилу умножения будет $2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^{10}$.

Для определения благоприятных исходов отметим прежде всего очевидную симметрию нашего опыта относительно выбора «орла» и «решки». Значит, исходов, в которых число «орлов» больше числа «решек» будет столько же, сколько исходов, где число «решек» больше числа «орлов». Остаются еще исходы, где «орлов» и «решек» поровну. Вот с них и начнем: каждый такой исход определяется выбором 5 монет, на которых выпадут «орлы» (на других 5 монетах выпадут «решки»). Такой выбор можно сделать C_{10}^5 способами. По правилу вычитания число исходов, в которых число «орлов» НЕ равно числу «решек», будет $2^{10} - C_{10}^5$, а число искомых благоприятных исходов — в два раза меньше: $\frac{1}{2}(2^{10} - C_{10}^5)$. Окончательно получаем:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2^{10} - C_{10}^5)}{2^{10}} = \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{C_{10}^5}{2^{10}}) \approx 0{,}377 .$$

<u>Пример 6.</u> Какова вероятность, что при подбрасывании N кубиков на каких-то кубиках выпадут совпадающие числа?

Прежде всего заметим, что задача имеет смысл только при $N > 1$. Далее, по принципу Дирихле при $N > 6$ искомая вероятность равна 1 (всегда найдутся по крайней мере два кубика с одинаковым числом очков). Остается решить задачу для $2 \le N \le 6$. Как и в предыдущем примере, легко найти общее количество исходов опыта по правилу умножения: $6 \cdot 6 \cdot ... \cdot 6 = 6^N$. Для благоприятных исходов снова воспользуемся правилом вычитания — найдем число исходов, где все числа на кубиках различны. При таком исходе на первом кубике может выпасть любое из 6 чисел, на втором — любое из 5 оставшихся, на втором — любое из 4 и т.д. Всего таких исходов по правилу умножения будет $6 \cdot 5 \cdot ... \cdot (6 - N + 1)$. Значит, благоприятных исходов по правилу вычитания будет $6^N - 6 \cdot 5 \cdot ... \cdot (6 - N + 1)$. Искомая вероятность будет

$$P(A) = \frac{6^N - 6 \cdot 5 \cdot ... \cdot (6 - N + 1)}{6^N} = 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot ... \cdot (6 - N + 1)}{6^N} .$$

Вот таблица, в которой эта вероятность посчитана для всех возможных значений N:

N	2	3	4	5	6	> 6
$P(A)$	0,167	0,444	0,722	0,907	0,985	1

Пример 7. Класс, в котором учится 12 девочек и 12 мальчиков, случайным образом делят на две равные группы для занятий на компьютерах. Какова вероятность того, что мальчиков и девочек в них окажется поровну?

Переформулируем задачу: из 24 учеников этого класса случайно отбирают 12. Какова вероятность, что среди них ровно 6 мальчиков? (Убедитесь, что это действительно та же задача!) Всего способов выбора 12 человек из 24 будет

$$C_{24}^{12} = \frac{24!}{12! \cdot 12!} = 2\,704\,000\,,$$

причем все эти способы равновозможны. Благоприятными будут исходы, в которых среди выбранных 12 человек ровно 6 мальчиков. Как сформировать любой такой исход? Сначала нужно выбрать любые 6 из 12 мальчиков, а потом добавить к ним любые 6 из 12 девочек. Общее количество таких вариантов выбора можно найти по правилу умножения:

$$C_{12}^{6} \cdot C_{12}^{6} = \frac{12!}{6! \cdot 6!} \cdot \frac{12!}{6! \cdot 6!} = 853\,800\,.$$

Искомая вероятность будет равна

$$P(A) = \frac{C_{12}^{6} \cdot C_{12}^{6}}{C_{24}^{18}} \approx 0{,}316\,.$$

Пример 8. В классе учится 12 мальчиков и 12 девочек. Их случайно рассадили за 12 парт. Какова вероятность того, что за каждой партой оказались мальчик и девочка?

24 человека можно посадить на 24 места 24! способами — именно столько равновозможных исходов у нашего эксперимента. Теперь найдем количество благоприятных исходов. При благоприятном исходе за каждой

из 12 парт сидит ровно один мальчик. Эти 12 мест для мальчиков (по одному месту на каждой парте) можно выбрать 2^{12} способами (два варианта для каждой из 12 парт). После выбора этих мест мальчиков можно рассадить по ним 12! способами, после чего девочек могут сесть на оставшиеся места также 12! способами. Получаем, что искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2^{12} \cdot 12! \cdot 12!}{24!} = 0{,}0015.$$

5. Классические модели с выбором элементов из конечного множества

Большинство приведенных выше примеров на вычисление вероятностей могут рассматриваться в рамках классической вероятностной модели, называемой еще «урновой схемой». Речь идет о задаче, в которой из урны (коробки, мешка), содержащей M одинаковых на ощупь шаров, не глядя, вынимают N шаров. В зависимости от механизма этого выбора различают несколько таких схем, о которых уже шла речь в нашей первой лекции.

Будем считать, что все шары пронумерованы числами от 1 до M.

I. Последовательный выбор с возвращением. Так называют эксперимент, в котором на каждом шаге извлеченный шар возвращается обратно. Понятно, что при этом один и тот же шар может появляться в нашем эксперименте неоднократно.

Исходами такого опыта являются все возможные последовательности из N чисел вида $(a_1, a_2, ..., a_N)$, где a_i — номер шара, извлеченного на i-ом шаге. По правилу умножения легко посчитать количество таких исходов: для первого шара — M вариантов, для второго — снова M вариантов и т.д., всего M^N исходов. При этом все такие исходы равновозможны.

Пример 1. $M = 4$, $N = 3$. Возможные исходы:

(1, 1, 1); (1, 1, 2); (1, 1, 3); …; (4, 4, 3); (4, 4, 4).

Перечислить их все затруднительно, поскольку их $4^3 = 64$ штуки.

Интересно, что подбрасывание монеты или кубика тоже можно рассматривать как выбор с возвращением:

• N-кратное бросание монеты (или одновременное бросание N монет) равносильно выбору с возвращением N шаров из урны с двумя шарами — один из них соответствует «орлу», другой — «решке»;

• N-кратное бросание кубика (или одновременное бросание N кубиков) равносильно выбору с возвращением N шаров из урны с шестью шарами — это шары с цифрами 1, …, 6.

II. Последовательный выбор без возвращения. Теперь вынутый шар обратно в урну не возвращается, и следовательно, повторно вынутым быть не может.

Исходами такого опыта являются все возможные размещения из M чисел по N, то есть последовательности вида $(a_1, a_2, ..., a_N)$, где все a_i различны и являются числами от 1 до M. Мы уже выясняли, что общее количество таких исходов будет $A_M^N = \dfrac{M!}{(M-N)!}$. При этом все они равновозможны.

Пример 2. $M = 4$, $N = 3$. Возможные исходы:

$$(1, 2, 3);\ \ (1, 3, 2);\ \ (2, 1, 3);\ \ \ldots;\ \ (4, 2, 3);\ \ (4, 3, 2).$$

Исходов стало меньше, чем при выборе с возвращением, но все равно достаточно много — $\dfrac{4!}{1!} = 24$.

Этой схеме соответствуют, например, задачи 1, 4, 8 из предыдущего раздела лекции.

III. Одновременный выбор. Шары вынимаются из урны одновременно, поэтому порядок их появления уже не учитывается — имеет значение только состав вынутой комбинации.

Исходами опыта являются все возможные сочетания из M чисел по N, то есть последовательности вида $[a_1, a_2, ..., a_N]$, где все a_i различны и являются числами от 1 до M, а квадратные скобки подчеркивают, что в комбинации не учитывается порядок следования элементов. Общее количество таких исходов будет $C_M^N = \dfrac{M!}{(M-N)! \cdot N!}$. При этом все они равновозможны.

Пример 3. $M = 4$, $N = 3$. Возможные исходы:

$$[1, 2, 3]; \quad [1, 2, 4]; \quad [1, 3, 4]; \quad [2, 3, 4].$$

Исходов теперь всего четыре. Этой схеме соответствуют, например, задачи 2, 3, 7 из предыдущего раздела.

С точки зрения механизма выбора последние две модели являются по существу эквивалентными. Дело в том, что при одновременном выборе используется все тот же механизм выбора без возвращения: ведь одновременность выбора только кажущаяся — все равно какой-то элемент мы возьмем первым, какой-то вторым и т.д. Просто в этой модели мы отказываемся учитывать этот порядок при описании исходов. Получается, что мы объединяем каждые $N!$ размещений, отличающихся только порядком следования элементов, в одно сочетание. Общее количество исходов сокращается при этом в $N!$ раз (в приведенном примере — с 24 до 4, то есть в 3!). Важно, что такие «укрупненные» исходы все равно остаются равновозможными.

При этом есть задачи, в которых из условия вообще не понятно, какую из двух последних моделей выбрать. Возьмем, к примеру, известную лотерею «Спортлото». Напомним, что участники лотереи должны зачеркнуть в своей карточке 5 номеров из 36, которые по их мнению выиграют в очередном тираже. При этом тираж проводится так: в барабан закладывается 36 шаров; они перемешиваются и начинают выкатываться друг за другом с небольшим интервалом времени (чтобы соблюсти интригу и дать время на рекламу). Как только выкатится 5 шаров, тираж заканчивается. Для тех кто не наблюдал его по телевизору, результаты печатаются на следующий день в газете. Интересно, что при этом уже не указывается последовательность, в которой выкатывались шары, а лишь состав выигрышной комбинации.

Получается, что если мы наблюдаем за тиражом по телевизору, то должны выбрать модель «Последовательный выбор без возвращения», а если читаем о его результатах в газете, то «Одновременный выбор». Очевидно, что наши шансы получить выигрыш от этого никак зависеть не будут. Убедимся в этом, посчитав вероятность угадать все 5 номеров.

Модель 1. Возможные исходы — размещения из 36 по 5. Всего таких исходов будет $A_{36}^5 = \dfrac{36!}{31!} = 45\,239\,040$. Благоприятным будет каждый исход, при котором зачеркнутые в нашей карточке 5 номеров «выкатываются» из барабана в любой последовательности. Таких исходов 5!, поэтому искомая вероятность:

$$P(A_5) = \frac{5!}{A_{36}^5} = \frac{5!31!}{36!} \approx 0{,}00000265 .$$

<u>Модель 2</u>. Возможные исходы — сочетания из 36 по 5. Всего таких исходов будет $C_{36}^5 = \frac{36!}{31!\cdot 5!} = 376\,992$. Благоприятным теперь будет всего один (!) исход. Искомая вероятность — та же самая:

$$P(A_5) = \frac{1}{C_{36}^5} = \frac{31!5!}{36!} \approx 0{,}00000265 .$$

Таким образом, обе модели одинаково успешно могут применяться в решении одних и тех же задач. Важно только не путать их в процессе решения: например, нельзя перечислять все возможные исходы, следуя модели 1, как размещения, а благоприятные исходы, следуя модели 2, как сочетания. В этом случае рассчитывать на правильный ответ уже не приходится.

Вопросы и задачи

<u>К разделу 1</u>

1. В номере автомобиля записываются подряд буква, три цифры и еще две буквы. Сколько таких номеров можно составить, если использовать только буквы А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, У, Х (эти буквы используются в реальных номерах российских автомобилей, поскольку совпадают по начертанию с буквами латинского алфавита)?

2. Какой номер автомобиля из предыдущей задачи будет первым, если выписывать все номера в лексикографическом порядке? Какой номер будет последним? Какой номер следует за номером «У 899 ХХ»? Какой номер ему предшествует?

3. В автомобиле 5 мест. Сколькими способами пять человек могут занять места для путешествия, если водить машину могут только трое из них.

4. После хоккейного матча каждый игрок одной команды пожал руку каждому игроку другой. Сколько всего игроков присутствовало на площадке, если было совершено 323 рукопожатия?

5. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске две различные клетки так, чтобы из одной в другую можно было попасть ходом а) ладьи; б) слона?

<u>К разделу 2</u>

6. Сколькими способами 5 человек могут встать в очередь к билетной кассе? Как называется каждая такая комбинация в комбинаторике?

7. В чемпионате России по футболу участвует 16 команд. Сколькими способами могут распределиться 3 призовых места? Как называется каждая такая комбинация в комбинаторике?

8. Объясните, почему перестановку можно считать частным случаем размещения.

9. Найдите количество нулей, на которые заканчивается число 100!

10. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из четырех карточек, на которых написаны цифры:

а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 3, 3; в) 1, 1, 2, 2.

<u>К разделу 3</u>

11. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных из класса, в котором 25 учеников? Как называется каждая такая комбинация в комбинаторике?

12. Сколькими способами в карточке лотереи «Спортлото» можно зачеркнуть 5 номеров из 36? Как называется каждая такая комбинация в комбинаторике?

13. Объясните, чем отличаются сочетания от размещений. Чего и во сколько раз больше?

14. Замок на подъезде имеет 10 кнопок и открывается одновременным нажатием на определенные 3 кнопки. За сколько минут (в худшем случае) можно открыть такой замок, если перебирать все возможные комбинации со скоростью 1 комбинация в секунду?

15. Группу из 20 туристов нужно распределить по 3 маршрутам так, чтобы по первому маршруту шли 8 человек, по второму — 7, по третьему — 5. Сколькими способами это можно сделать?

<u>К разделу 4</u>

16. Из Наташиного класса, в котором 25 учеников, по жребию выбирают двух дежурных. Какова вероятность, что Наташа будет дежурить? Какова вероятность, что дежурить будет Наташа и ее подруга Света?

17. Одновременно бросают 3 кубика. Какова вероятность того, что: а) на всех кубиках выпадут одинаковые числа; б) все числа на кубиках разные; в) выпало ровно два одинаковых числа?

18. Колоду из 36 карт раздают на двоих. Какова вероятность, что тузов у них окажется поровну?

19. Группу из 20 школьников распределяют по жребию по трем автомобилям для поездки в соседний город. В первый автомобиль влезает 8 человек, во второй — 7, в третий — 5. С какой вероятностью два друга — Вадим и Сева — попадут в одну машину?

20. Монету бросают 100 раз подряд. Найдите вероятность того, что количество «орлов» нечетно. Изменится ли ответ, если монету бросают 101 раз?

К разделу 5

21. Замените каждый из следующих экспериментов случайным выбором шаров и определите, к какой схеме выбора он относится: а) 10 раз подряд бросают монету; б) одновременно подбрасывают 5 кубиков; в) колоду из 36 карт раздают на двоих.

22. В урне 10 шаров. Вероятность вытащить из нее 2 белых шара равна $\frac{2}{15}$. Сколько в урне белых шаров?

23. Из коробки с 3 белыми и 3 черными шарами вынимают, не глядя, 2 шара. Какова вероятность того, что они оба белые? Найдите ответ для каждой из трех схем выбора: а) с возвращением; б) без возвращения; в) одновременный.

24. Три друга делят поровну 30 конфет, 3 из которых с сюрпризом. С какой вероятностью каждому из троих друзей достанется по сюрпризу?

Методические замечания

Основная школа. Примеры решения комбинаторных задач: перебор вариантов, правило умножения. Равновозможные события и подсчет их вероятности.

Старшая школа. Поочередный и одновременный выбор нескольких элементов из конечного множества. Формулы числа перестановок, сочетаний, размещений. Решение комбинаторных задач. Решение практических задач с применением вероятностных методов.

К разделу 1

Уже признано, что главная причина неудач комбинаторики в школе — стремление с первых шагов сделать акцент *не на составлении, а на подсчете комбинаций*. Перечислительные задачи, безусловно, должны предшествовать задачам подсчета или идти параллельно с ними. Именно такой подход принят в [1], где изучение комбинаторики начинается с перечисления комбинаций различного вида. Для этих целей используются деревья, обсуждается логика перебора, рассматриваются различные виды комбинаций (без специальных терминов и формул для их подсчета).

Перебором простейших комбинаций мы уже занимались в предыдущей лекции, когда выписывали все возможные исходы опытов, в которых участвовало несколько объектов (шаров, кубиков, монет, перчаток и т.д.). Здесь мы возвращаемся к этому вопросу снова. Чтобы перечисление не было стихийным (а в этом случае мы рискуем упустить какие-то комбинации), предлагается *ввести на комбинациях отношение порядка*. Наиболее естественным здесь является лексикографический порядок, хорошо знакомый школьникам по работе с обычным словарем.

В качестве рабочего инструмента, аналогичного рассмотренной ранее схеме решения задач на классическую вероятность, можем предложить следующую общую *схему решения переборных задач*:

1. Придумать обозначения элементов, участвующих в комбинациях (если это не числа или буквы).

2. Выписать первую комбинацию и несколько следующих за ней.

3. Выписать последнюю комбинацию и несколько предшествующих ей.

4. Выписать произвольную комбинацию. Найти непосредственно ей предшествующую и следующую за ней.

5. Сформулировать правило, по которому ищется следующая комбинация в общем случае.

Третий шаг в этой схеме интересно организовать в форме коллективного соревнования: кто быстрее найдет следующую комбинацию. Ответы, которые предлагают ученики, либо сразу отбрасываются (комбинация оказывается меньше заданной), либо остаются в качестве претендента на ответ (кто найдет комбинацию между заданной и предложенной?) — пока не будет найден правильный ответ. Четвертый шаг наиболее сложный и требует от учащихся достаточно высокой математической и алгоритмической культуры.

Как уже упоминалось выше, можно использовать для перечисления комбинаций деревья, хотя, откровенно говоря, наша практика занятий со школьниками не показала их особой продуктивности. Дело в том, что при малом числе элементов легко перечислить все комбинации и без деревьев, а при большом — дерево слишком быстро ветвится и становится необозримым.

В данном разделе вводятся главные правила для подсчета комбинаций: правило умножения и правило сложения. Собственно, правилом как таковым можно считать только правило умножения. Правило сложения — это скорее один из методов решения комбинаторных задач. Если для подсчета комбинаций не идет правило умножения (не понятно, на что умножать на следующем шаге) — попытайтесь использовать правило сложения: поделить комбинации на непересекающиеся классы, посчитать число комбинаций внутри каждого класса, а потом сложить эти числа.

Умение *перебирать комбинации* и *находить их число с помощью правил умножения и сложения* — основа комбинаторной культуры школьника и залог успешного решения большинства комбинаторных задач. Эти умения должны быть сформированы в основной школе. Старшая школа предусматривает знакомство ученика с основными типами комбинаций, о которых и идет речь в следующих разделах лекции.

К разделу 2

С перестановок, как правило, начинается знакомство с основными типами комбинаций. Подсчет числа перестановок не вызывает затруднений у школьников и является прекрасной иллюстрацией правила умножения.

Гораздо сложнее оказывается *задача перебора всех перестановок*. В лекции приведен пример, в котором предлагается выписать для данной перестановки непосредственно следующую за ней. Замечательно, если учащиеся смогут самостоятельно сформулировать общее правило перебора перестановок. Ну, а если в классе есть ученики, увлекающиеся программированием, то им можно предложить составление программы перебора перестановок.

Размещения обобщают понятие перестановки. Для решения вероятностных задач они играют еще большую роль, чем перестановки, поскольку именно на них строится *схема выбора без возвращения*: из M объектов друг за другом вынимают без возвращения N объектов. Каждый исход такого опыта — это и есть размещение из M по N. Как и для перестановок, число размещений легко находится по правилу умножения.

При подсчете числа перестановок и размещений школьники впервые сталкиваются с факториалом. Самое время уделить ему здесь немного внимания, поговорить о его замечательных свойствах. Обязательно нужно показать учащимся, как быстро растут значения $N!$, вычислив несколько первых значений и оценив их величину при больших N. Хорошая задача для программистов — написать программу, которая выписывает все цифры числа 100! (для математиков — найти количество нулей в конце этого числа).

К разделу 3

В этом разделе мы предлагаем наряду с традиционными правилами умножения и сложения ввести в рассмотрение незаслуженно «обиженные» два других комбинаторных правила — вычитания и деления. Как и правило сложения, это скорее общие методы решения задач: правило вычитания следует применять, когда легче посчитать комбинации, которые НЕ обладают заданным свойством, а правило деления — когда при умножении одна и та же комбинация считается многократно (но при этом каждая комбинация — одно и то же число раз).

Далее в разделе вводятся сочетания — пожалуй, самый важный для вероятностных задач тип комбинаций. Если без формул для числа перестановок и размещений, вообще говоря, можно обойтись — достаточно знать правило умножения, — то без формулы для числа сочетаний решить многие вероятностные задачи будет весьма затруднительно. На сочетаниях строится *схема с одновременным выбором предметов*: из M объектов одновременно вынимают наугад N объектов. Каждый исход такого опыта — сочетание из M по N.

При переборе сочетаний нужно учитывать, что сочетания отличаются друг от друга только составом предметов — значит, порядок элементов внутри сочетания не важен. Для этого при выписывании сочетания следует всегда располагать все его элементы по возрастанию.

К разделу 4

Материал этого раздела служит своеобразным «оправданием» тех трудностей, которые приходится преодолевать при изучении комбинаторики. Именно здесь содержится наибольшее количество интересных вероятностных задач с нетривиальным решением и интересным практическим содержанием.

На материале этого раздела школьники должны почувствовать, насколько мощный инструмент для вычисления вероятности они получили в виде только что изученных комбинаторных правил и формул.

В приведенных примерах разбираются случайные опыты, исходы которых представляют собой рассмотренные перед этим типы комбинаций:

перестановки, размещения, сочетания. Ключевым шагом в решении таких задач является, как правило, определение типа комбинации, после чего подсчет вероятности становится делом техники.

К разделу 5

В этом разделе обобщаются те модели случайных опытов, которые разбирались в этой и предыдущей лекциях. Выясняется, что большинство из них может быть сведено к одной из трех классических моделей с выбором элементов из конечного множества. Понимание этого требует от школьника довольно высокого уровня абстрактного мышления. Можно сказать, что здесь закладывается (или развивается) одна из важнейших сторон математической культуры: *умение видеть одинаковое в разном и разное в одинаковом*.

Теория вероятностей, как никакая другая область математики, дает для этого богатейший материал. Кроме того, она предоставляет реальную возможность проверить адекватность выбранных моделей на практике: для этого достаточно провести серию соответствующих экспериментов и сверить найденную вероятность с частотой. Здесь неоценимую помощь может оказать компьютер, снабженный соответствующим программным обеспечением (см., например, [5]).

Лекция 3
Свойства вероятностей

В этой лекции мы узнаем, что с событиями можно работать как с множествами: объединять, пересекать, находить дополнение. А главное, мы выясним, что происходит при этом с их вероятностями.

1. Противоположное событие и его вероятность. Диаграммы Эйлера

В наших первых лекциях мы неоднократно обращались к понятию случайного события. Сначала мы назвали случайным любое событие, которое может произойти или не произойти в результате случайного эксперимента. Затем мы выяснили, что событие можно рассматривать как некоторое подмножество исходов данного эксперимента, — а именно тех исходов, при которых это событие наступает.

Обозначая множество всех возможных исходов эксперимента через Ω, мы рассматривали каждый элементарный исход как элемент этого множества:

$$\omega \in \Omega,$$

а каждое случайное событие — как его подмножество:

$$A \subseteq \Omega.$$

В соответствии с таким взглядом на события естественно перенести на них те операции, которые хорошо известны в теории множеств: объединение, пересечение, дополнение. Каждая из них допускает естественную интерпретацию в терминах случайных событий.

Начнем с дополнения. Напомним еще раз, что все множества, о которых будет идти речь, являются подмножествами некоторого объемлющего множества Ω, содержащего все возможные исходы эксперимента.

<u>Определение 1</u> (для множеств). Множество $\overline{A}$ называется **дополнением** к множеству A, если оно состоит из тех и только тех элементов Ω, которые не входят в A. Как вы уже поняли, черта над множеством как раз и обозначает операцию дополнения.

Определение 1 (для событий). Событие $\overline{A}$ называется **противоположным** к событию A, если оно происходит тогда и только тогда, когда не происходит A. Другими словами, противоположное событие состоит из тех элементарных исходов множества Ω, при которых событие A не происходит.

Последнее замечание показывает, что мы имеем по существу два одинаковых определения, выраженных разным языком. Поэтому противоположное событие часто также называют дополнением.

Интересно, что свойство «дополнять» или «быть противоположным» для двух событий является взаимным: если B противоположно A, то и A противоположно B:

$$B = \overline{A}\,, \quad A = \overline{B}\,.$$

Этот факт можно записать еще и таким необычным образом:

$$\overline{\overline{A}} = A\,.$$

Приведем примеры противоположных событий.

Пример 1. Рассмотрим следующие случайные события, связанные с подбрасыванием кубика:

A = {выпадет четное число очков},
B = {выпадет шестерка},
C = {выпадет число меньше трех}.

Каждое из них можно записать в виде множества благоприятных исходов:

$A = \{2, 4, 6\}$,
$B = \{6\}$,
$C = \{1, 2\}$.

Противоположными событиями будут:

$\overline{A}$ = {выпадет нечетное число очков},
$\overline{B}$ = {выпадет не шестерка},
$\overline{C}$ = {выпадет число больше или равное трех},

а дополнительными множествами —

$\overline{A} = \{1, 3, 5\}$,
$\overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$\overline{C} = \{3, 4, 5, 6\}$.

Отметим, что «словесная» формулировка события может быть разной, а вот представление его в виде подмножества исходов всегда однозначно. Например, событие $\bar{C}$ можно описать и так:

$$\bar{C} = \{\text{выпадет число больше двух}\},$$

однако его запись в виде подмножества от этого не изменится.

* * *

Почти очевидным является тот факт, что вероятность противоположного события можно вычислить по формуле:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

В самом деле, каждый раз, когда событие Aпроисходит, событие $\bar{A}$ не происходит и наоборот. Значит, после любых N случайных опытов выполняется равенство

$$N_A + N_{\bar{A}} = N,$$

в котором через N_A обозначена абсолютная частота A, а через $N_{\bar{A}}$ — абсолютная частота $\bar{A}$. Поделив обе части этого равенства на N, получим, что сумма относительных частот для событий A и $\bar{A}$ всегда равна 1. Поскольку при увеличении числа испытаний равенство сохраняется, а частоты приближаются к вероятностям, то сумма вероятностей для A и $\bar{A}$ также равна 1, откуда и следует наша формула.

В случае с равновозможными исходами эту формулу можно получить и по-другому. Пусть наш опыт может закончиться одним из n равновозможных исходов, m из которых благоприятствуют наступлению события A. Тогда остальные $n - m$ исходов благоприятствуют наступлению $\bar{A}$. Поэтому

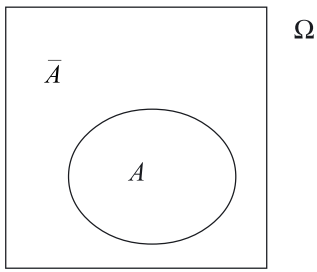
$$P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A).$$

Полученная формула оказывается особенно полезной в задачах, где найти вероятность противоположного события проще, чем вероятность заданного события.

Пример 2. С какой вероятностью при бросании двух кубиков на них выпадет разное число очков?

Пусть A = {на кубиках выпало разное число очков}. Тогда $\bar{A}$ = {на кубиках выпало одинаковое число очков}, или $\bar{A}$ = {(1; 1), (2; 2), (3; 3), (4; 4), (5; 5), (6; 6)}. Отсюда $P(\bar{A}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ и $P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Рассмотренные в этом и последующих разделах данной лекции соотношения между событиями удобно изображать в виде специальных рисунков, получивших название **диаграмм Эйлера**. Каждое событие на таком рисунке изображается в виде круга или какой-нибудь другой фигуры. Взаимное расположение фигур должно соответствовать соотношению событий. При этом все такие фигуры размещаются внутри одного и того же прямоугольника, изображающего множество всех возможных исходов опыта Ω. В частности, событие A и противоположное к нему $\bar{A}$ будут изображаться на диаграмме Эйлера так:



2. Объединение и пересечение событий

Наиболее важными теоретико-множественными операциями являются объединение и пересечение. Напомним, как они определяются, и введем соответствующие понятия для событий.

Определение 1 (для множеств). **Объединением множеств** A и B называется множество C, которое содержит те и только те элементы, которые входят *хотя бы в одно из двух* множеств A или B.

Определение 1 (для событий). **Объединением событий** A и B называется событие C, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит *хотя бы одно из двух* событий A или B. Поясним, что слова «хотя бы одно из двух» означают, что может наступить: только событие A, только событие B, а также оба эти события одновременно.

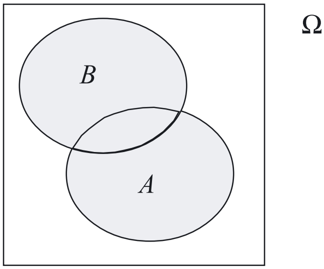
Объединение событий (как и объединение множеств) обозначается так:

$$C = A \cup B .$$

Иногда вместо термина «объединение» используется термин «сумма событий». В этом случае используют и другую символическую запись этой операции:

$$C = A + B .$$

На диаграмме Эйлера объединение событий можно изобразить так:



Пример 1. Рассмотрим эксперимент с кубиком. Найдем объединение событий A и B в каждом из перечисленных случаев:

а) A = {выпадет тройка}, B = {выпадет пятерка};

б) A = {выпадет простое число}, B = {выпадет нечетное число};

в) A = {выпадет четное число}, B = {выпадет нечетное число};

г) A = {выпадет четное число}, B = {выпадет шестерка}.

Для ответа на вопрос представим каждое событие в виде множества благоприятных исходов и найдем соответствующие объединения:

а) $A = \{3\}$, $B = \{5\}$, $A \cup B = \{3, 5\}$;

б) $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$;

в) $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{1, 3, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

г) $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{6\}$, $A \cup B = \{2, 4, 6\}$.

Словами результат объединения можно описать по-разному — например, так:

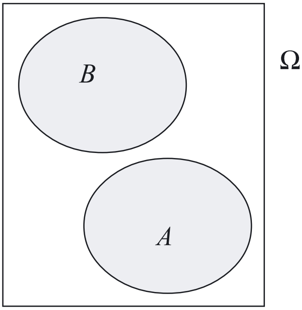
а) $A \cup B$ = {выпадет тройка или пятерка};

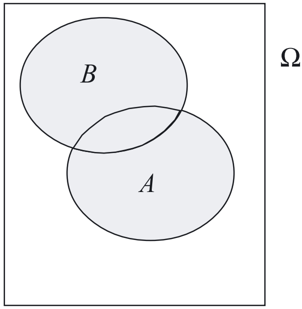
б) $A \cup B$ = {выпадет любое число, кроме 4 и 6};

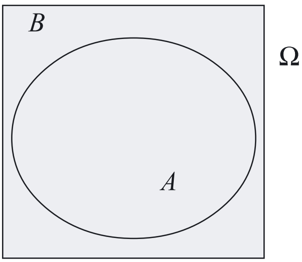
в) $A \cup B$ = {выпадет любое число};

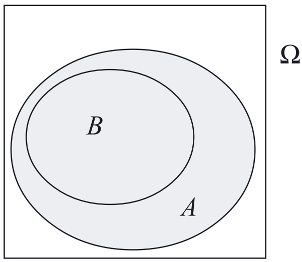
г) $A \cup B$ = {выпадет четное число}.

Интересно показать каждый из перечисленных случаев на диаграмме Эйлера, — все эти диаграммы будут иметь некоторые принципиальные отличия друг от друга. Попробуйте сформулировать эти отличия самостоятельно:

а)


б)


в)


г)


Важно понимать, что при нахождении объединения не нужно включать в него общие исходы событий A и B дважды — ведь один и тот же элемент вообще не может входить дважды в какое бы то ни было множество. Именно поэтому в случае г) результат объединения совпадает с одним из исходных множеств. Рассмотрим еще один пример на эту тему.

<u>Пример 2</u>. Рассмотрим эксперимент, в котором из колоды в 36 карт случайно вытягивается одна карта. Сколько элементарных исходов содержит объединение событий A = {вытянут даму} и B = {вытянут пику}?

Событие $A \cup B$ наступает, когда из колоды вытягивают пику (таких карт восемь) или даму (их четыре). При этом могут произойти и оба эти события одновременно (вытянут даму пик). Значит, для определения числа элементарных исходов, входящих в объединение, нужно сложить 8 и 4, а потом вычесть 1. Получится 11 исходов. Мы еще вернемся к такому подсчету в следующем разделе нашей лекции.

* * *

Последний пример вплотную подвел нас к рассмотрению второй важнейшей теоретико-множественной операции — пересечения множеств.

Определение 2 (для множеств). **Пересечением множеств** A и B называется множество C, которое содержит те и только те элементы, которые входят *в оба* множества A и B.

Определение 2 (для событий). **Пересечением событий** A и B называется событие C, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят *одновременно оба* события A и B. Другими словами, эксперимент заканчивается исходом, благоприятным как для A, так и для B.

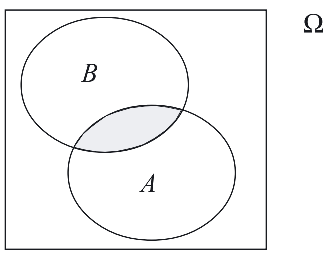
Пересечение событий (как и пересечение множеств) обозначается так:

$$C = A \cap B.$$

Иногда вместо термина «пересечение» используется термин «произведение событий». В этом случае, как и для суммы событий, используют другую символическую запись:

$$C = A \cdot B.$$

На диаграмме Эйлера пересечение изображается так:



Из определения объединения и пересечения множеств немедленно следует, что *пересечение любых множеств содержится в их объединении* (это хорошо видно на диаграмме Эйлера).

Пример 3. Вернемся к примеру 1 и найдем пересечения приведенных там событий (напомним, что рассматривается эксперимент с кубиком):

а) A = {выпадет тройка}, B = {выпадет пятерка};

б) A = {выпадет простое число}, B = {выпадет нечетное число};

в) A = {выпадет четное число}, B = {выпадет нечетное число};

г) A = {выпадет четное число}, B = {выпадет шестерка}.

Как и при нахождении объединений удобнее всего представить каждое событие в виде множества благоприятных исходов и найти общие исходы A и B:

а) $A = \{3\}$, $B = \{5\}$, $A \cap B = \varnothing$;

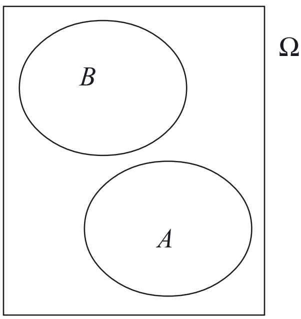
б) $A = \{2, 3, 5\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $A \cap B = \{3, 5\}$;

в) $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{1, 3, 5\}$, $A \cap B = \varnothing$;

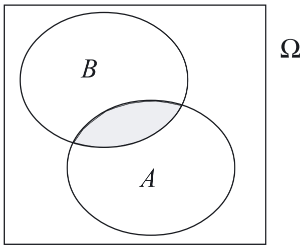
г) $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{6\}$, $A \cap B = \{6\}$.

Напомним, что знак «$\varnothing$» используется в математике для обозначения пустого множества, не содержащего ни одного элемента. Диаграммы Эйлера в этих четырех случаях будут следующими:

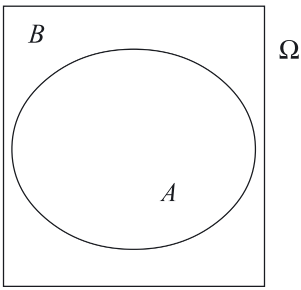
а)



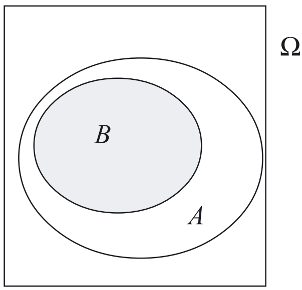
б)



в)



г)



В случаях а), в) пересечение событий пусто, поэтому на соответствующих диаграммах ничего не заштриховано. На языке событий правильнее было бы сказать, что пересечением событий A и B в этих случаях является невозможное событие, — другими словами, они не могут произойти одновременно, у них нет общих благоприятных исходов.

Такие события играют в теории вероятностей настолько важную роль, что для них вводят специальное определение, которое мы рассмотрим в следующем разделе.

3. Несовместные события. Формула сложения вероятностей

Определение 1. Два события A и B называются **несовместными**, если их пересечение пусто, т.е. они не могут наступить одновременно в результате одного случайного эксперимента.

Приведем несколько примеров несовместных событий.

Пример 1. В следующих экспериментах пары событий A и B являются несовместными:

а) бросают монету: A = {«орел»}, B = {«решка»};

б) бросают 2 кубика: A = {сумма очков нечетна}, B = {на кубиках выпало одинаковое число очков};

в) из коробки, в которой 2 красных, 2 желтых и 2 зеленых шара вытаскивают 2 шара: A = {шары одного цвета}, B = {шары разных цветов};

г) из той же коробки снова вытаскивают 2 шара: A = {оба шара красные}, B = {оба шара зеленые}.

Заметим, что говорить о несовместности событий можно *только в рамках одного эксперимента*. Если в пункте а) указанные события A и B относятся к разным опытам, то говорить об их несовместности, разумеется, нельзя. Условия эксперимента тоже очень важны: стоит в пункте б) перейти от двух кубиков к трем, и события станут совместными.

В приведенном примере можно выделить в особую категорию случаи а), в) — в них события A и B являются противоположными. Понятно, что противоположные события A и $\overline{A}$ всегда несовместны — ведь у них не может быть общих исходов по определению противоположного события (в $\overline{A}$ входит все то, что не входит в A). С другой стороны, если взять объединение противоположных событий, то в него войдут все возможные исходы опыта:

$$A \cup \bar{A} = \Omega, \qquad A \cap \bar{A} = \varnothing .$$

Можно сказать, что A и $\bar{A}$ образуют *разбиение* множества Ω на два непересекающихся множества.

* * *

Если два события A и B несовместны, то событие $A \cup B$ происходит в одной из двух *взаимоисключающих* ситуаций: либо происходит событие A, либо событие B. Это означает, что если обозначить через $N_A, N_B, N_{A \cup B}$ абсолютные частоты событий A, B и $A \cup B$, то после любого числа экспериментов будет выполняться соотношение

$$N_{A \cup B} = N_A + N_B .$$

Поделив обе части равенства на обще число экспериментов N, получим соотношение для относительных частот:

$$\frac{N_{A \cup B}}{N} = \frac{N_A}{N} + \frac{N_B}{N} .$$

Поскольку это соотношение остается верным после любого числа экспериментов, а с ростом N частоты приближаются к вероятностям, то аналогичное равенство будет выполнено и для вероятностей несовместных событий:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) .$$

Это тождество называется **формулой сложения вероятностей для несовместных событий**. Она легко обобщается на любое количество случайных событий, несовместных попарно:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k) .$$

<u>Пример 2</u>. Вернемся к рассмотренному ранее примеру 5 из предыдущего раздела. Напомним, что там рассматривался опыт, в котором из коробки с 2 красными, 2 желтыми и 2 зелеными шарами извлекались наугад 2 шара. Найдем вероятности событий:

A = {шары будут одного цвета};

B = {шары будут разных цветов};

C = {среди вынутых шаров будет хотя бы один красный}.

Обратившись к событиям A_1, …, A_6, рассмотренным в примере 5, выразим через них перечисленные события:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \;;$$

$$B = A_4 \cup A_5 \cup A_6 \;;$$

$$C = A_1 \cup A_5 \cup A_6 \;.$$

А теперь применим формулу сложения вероятностей для несовместных событий:

$$P(A) = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}\;;$$

$$P(B) = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}\;;$$

$$P(C) = \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}\;.$$

* * *

А что будет с формулой сложения вероятностей, если события A и B пересекаются? Дело в том, что в этом случае равенство для частот $N_{A \cup B} = N_A + N_B$ перестает выполняться, поскольку события A и B могут произойти одновременно. Вместо него можно записать более сложное соотношение, остающееся справедливым после любого числа экспериментов:

$$N_{A \cup B} = N_A + N_B - N_{A \cap B}\;.$$

Доказывается оно очень просто: сложив частоты событий A и B, мы дважды посчитаем те опыты, в которых эти события произошли одновременно. Значит, если вычесть количество таких опытов, то останется в точности количество тех, в которых происходило хотя бы одно из событий A, B.

Как и раньше, можно переписать эту формулу для относительных частот, а от нее перейти к вероятностям:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)\;.$$

Полученная формула называется **формулой сложения вероятностей** и справедлива для любых случайных событий A и B.

* * *

Можно ли считать приведенные выше рассуждения строгим математическим доказательством полученных формул? Скорее нет, чем да. Это вполне разумные, правдоподобные рассуждения, но для строгого доказательства в них есть одно слабое место. Переход на последнем шаге доказательства от относительных частот к вероятностям выглядит не совсем обоснованным. В математике такой прием называется *предельным переходом*, однако здесь он не совсем обоснован, так как вероятность не определялась нами в строгом смысле как предел относительной частоты (да ее так и невозможно определить).

При аксиоматическом подходе к определению вероятности формула сложения вероятностей для несовместных событий принимается как аксиома, а общая формула легко выводится из нее через элементарные теоретико-множественные преобразования.

Покажем теперь, как можно применять полученную формулу на практике.

<u>Пример 3</u>. Бросают 2 кубика. С какой вероятностью будет выброшена хотя бы одна шестерка? Рассмотрим случайные события:

A = {шестерка выпадет на первом кубике};

B = {шестерка выпадет на втором кубике};

$A \cup B$ = {шестерка выпадет хотя бы на одном кубике};

$A \cap B$ = {выпадут две шестерки}.

По формуле сложения вероятностей получаем ответ:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

Можно решить задачу и по-другому, воспользовавшись формулой для вероятности противоположного события. Рассмотрим

C = {шестерка выпадет хотя бы на одном кубике};

$\bar{C}$ = {шестерка не выпадет ни на одном из кубиков}.

Тогда $P(\bar{C}) = \frac{25}{36}$ и $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$ — получаем тот же ответ.

По поводу двух последних решений отметим следующее. Чем дальше мы будем изучать теорию вероятностей, тем больше у нас будет различных понятий и формул, а значит, и подходов к решению одной и той же задачи. Как всегда особенно приятно в таких случаях получить один и тот же ответ, решив задачу разными способами. Вот еще один пример такого же рода.

Пример 4. Из перетасованной колоды с 36 картами случайно вынимают две карты. С какой вероятностью они будут одной масти?

1-е решение. Искомое событие можно представить как объединение четырех непересекающихся событий: $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, где

A_1 = {обе карты пиковой масти};

A_2 = {обе карты трефовой масти};

A_3 = {обе карты бубновой масти};

A_4 = {обе карты червовой масти}.

Найдем вероятность A_1, используя полученные ранее знания из комбинаторики:

$$P(A_1) = \frac{C_9^2}{C_{36}^2} = \frac{9!}{2!\cdot 7!} \cdot \frac{2!\cdot 34!}{36!} = \frac{8\cdot 9}{35\cdot 36} = \frac{2}{35}.$$

В силу очевидной симметрии вероятности событий A_2, A_3, A_4 будут такими же. По формуле сложения вероятностей для несовместных событий получаем

$$P(A) = \frac{2}{35} + \frac{2}{35} + \frac{2}{35} + \frac{2}{35} = \frac{8}{35}.$$

2-е решение. Пусть мы уже вытащили одну карту. Теперь в колоде осталось 35 карт, из которых ровно 8 карт имеют ту же масть. Значит, вероятность искомого события $\frac{8}{35}$.

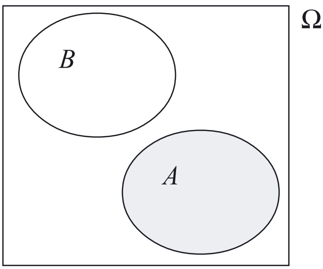
Конечно, 2-е решение намного оригинальнее и привлекательнее. Но все-таки оно не совсем честное. Что значит «пусть мы уже вытащили»? Имеем ли мы право проводить такие рассуждения? Об этом мы поговорим в следующем разделе.

4. Независимые события. Условная вероятность. Формула умножения вероятностей

Понятие *независимости* является центральным во всей теории вероятностей. Математики считают, что именно оно выделяет ее из *общей теории меры* и делает самостоятельной отраслью математической науки с необъятным полем для приложений.

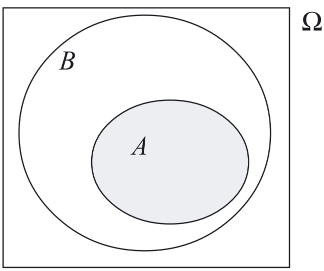
Рассмотрим два случайных события A и B, связанные с одним и тем же случайным экспериментом. Предположим, что в результате эксперимента произошло событие A. Можно ли в этом случае сказать что-либо о событии B? Изменились ли его шансы? Разумеется, ответ на этот вопрос будет зависеть от того, о каких событиях идет речь, и может быть как положительным, так и отрицательным. Бывают ситуации, когда, получив информацию о событии A, мы можем однозначно сказать, что событие B произошло, или, наоборот, точно сказать, что не произошло.

Пример 1. Пусть A и B несовместны, и в результате эксперимента событие A произошло. Что можно сказать о B? Посмотрим на диаграмму Эйлера:



Событие B точно не произошло!

Пример 2. Пусть $A \subseteq B$, и в результате эксперимента событие A произошло. Что можно сказать о B? Посмотрим на диаграмму Эйлера:



Событие B точно произошло!

В этих двух примерах события A и B связаны между собой очень сильно, можно сказать, что они сильно зависимы. А вот пример совсем другого рода.

Пример 3. Бросают два кубика. Рассмотрим события

A = {на первом кубике выпадет шестерка};

B = {на втором кубике выпадет шестерка}.

Пусть известно, что событие A произошло. Что можно сказать о событии B? Его шансы вообще никак не изменились. Результат эксперимента с первым кубиком не может повлиять на результат эксперимента со вторым. В этом случае разумно считать события A и B независимыми.

Пример 4. Из натуральных чисел от 1 до 10 наудачу выбирают одно число. Рассмотрим события

A = {выбранное число будет делиться на 2};

B = {выбранное число будет делиться на 3}.

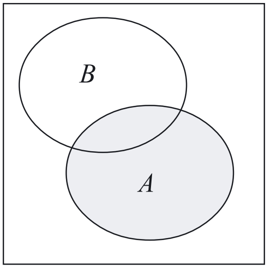
Что можно сказать о зависимости этих событий? Казалось бы, делимость на 2 никак не связана с делимостью на 3. Вот если бы речь шла о делимости на 2 и на 4 — тогда другое дело. И тем не менее, они зависимы. Точнее было бы сказать, они *статистически зависимы*.

Чтобы разобраться с этой странной зависимостью, найдем для начала вероятность события B. Из рассматриваемых чисел на 3 делятся три числа — 3, 6 и 9. Отсюда $P(B)=\frac{3}{10}$.

Теперь представим себе, что мы получили информацию о том, что выбранное число делится на 2 (т.е. событие A произошло), но само это число осталось неизвестным. Какова теперь вероятность, что оно делится на 3? Поскольку мы точно знаем, что выбранное число делится на 2, то это одно из пяти чисел 2, 4, 6, 8, 10. Среди этих чисел на 3 делится только число 6. Следовательно, в этих условиях разумно считать вероятностью события B дробь $\frac{1}{5}$.

Мы видим, что $\frac{1}{5}<\frac{3}{10}$, значит, шансы события B уменьшились (правда, очень незначительно — всего на $\frac{1}{10}$). Следовательно, события A и B нельзя считать абсолютно независимыми.

Попробуем разобраться, откуда взялась в наших рассуждениях дробь $\frac{1}{5}$. Нарисуем события A и B на диаграмме Эйлера:



Ω

Фраза «событие A произошло» означает сужение множества всех возможных исходов Ω до множества A. Посмотрим на пересечение событий A и B:

1) если оно пусто (как в примере 1), то B произойти уже не может, т.к. не осталось благоприятных для него исходов;

2) если оно совпадает со всем A (как в примере 2), то B обязательно произойдет, т.к. все оставшиеся исходы благоприятны для B;

3) наконец, если оно не пусто и не совпадает со всем A (как в примере 4), то новую вероятность события B разумно определить как отношение числа исходов из $A \cap B$ к числу исходов из A; эту вероятность называют **условной вероятностью** события B при условии, что событие A произошло.

В общем случае, когда исходы опыта не обязательно равновозможны, поступают точно так же: **условной вероятностью события *B* при условии *A*** называют отношение

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Можно сказать, что это *вероятность события B в новых условиях: когда известно, что событие A произошло*.

<u>Пример 5</u>. Из коробки с 2 белыми и 2 черными шарами вынимают друг за другом без возвращения 2 шара. Рассмотрим события

A_1 = {первый шар белый};

A_2 = {второй шар белый};

$A = A_1 \cap A_2$ = {оба шара белые}.

Найдем сначала их вероятности. Вычисление вероятности A_1 не составляет труда: из четырех возможных исходов два благоприятных, поэтому $P(A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. С вероятностью A_2 дело обстоит несколько сложнее, хотя почти очевидно, что она тоже равна $\frac{1}{2}$ (а чему еще она может равняться, если ситуация абсолютно симметрична относительно черных и белых шаров?). Чтобы получить этот результат по всем правилам, выпишем исходы всего эксперимента в целом, считая вынутыми уже оба шара:

ББ, БЧ, ЧБ, ЧЧ

(Б — белый шар, Ч — черный шар). Если вам кажется, что они равновозможны, обязательно вернитесь к <u>опыту 8</u> из лекции 1! На самом деле равновозможными исходами опыта будут следующие 12 исходов:

12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43

(мы перенумеровали все шары числами от 1 до 4). Будем считать, что шары № 1 и № 2 — белые, а № 3 и № 4 — черные. Тогда

$$A_1 = \{12,\ 13,\ 14,\ 21,\ 23,\ 24\},\quad P(A_1)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2};$$

$$A_2 = \{12,\ 21,\ 31,\ 32,\ 41,\ 42\},\quad P(A_2)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2};$$

$$A = A_1 \cap A_2 = \{12,\ 21\},\quad P(A_1 \cap A_2)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}.$$

А теперь найдем условные вероятности событий A_1 и A_2 друг относительно друга.

а) $P(A_2 \mid A_1)=\dfrac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{2}{1}=\dfrac{1}{3}$.

Найденное значение можно было получить гораздо быстрее: ведь $P(A_2 \mid A_1)$ это вероятность события A_2 при условии, что A_1 произошло. Если A_1 произошло, то в коробке осталось 3 шара, из которых 1 белый и 2 черных. Вероятность вынуть из такой коробки белый шар будет, разумеется, $\frac{1}{3}$. Получается, что $P(A_2 \mid A_1)$ находится в этой ситуации даже проще, чем $P(A_2)$!

б) $P(A_1 \mid A_2) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{2}{1} = \dfrac{1}{3}$.

Во-первых, сразу отметим, что тот же ответ в пункте б) получился только потому, что $P(A_1) = P(A_2)$; в общем случае такого равенства уже не будет. Во-вторых, посчитать $P(A_1 \mid A_2)$ как вероятность A_1 в новых условиях, когда A_2 уже произошло, здесь не удается — ведь A_1 *во времени предшествует* A_2! Тем не менее говорить об условной вероятности $P(A_1 \mid A_2)$ все равно можно — только считать ее придется по определению, то есть именно так, как это сделано выше.

* * *

Итак, для любых событий A и B мы ввели понятие условной вероятности B относительно A следующим образом:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

предполагая при этом, что $P(A) \neq 0$. Вполне естественно считать, что событие B не зависит от события A, если его вероятность не изменяется после наступления A, т.е. его условная вероятность равна безусловной:

$$P(B \mid A) = P(B).$$

Перепишем последнее равенство, подставив в него $P(B \mid A)$ из предыдущей формулы:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B);$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

К тому же результату мы придем, если предположим, что A не зависит от B:

$$P(A \mid B) = P(A);$$
$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A);$$
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Последнее равенство удобно тем, что оно симметрично относительно событий A и B. В теории вероятностей его и принимают за определение независимости: случайные события A и B называются **независимыми**, если вероятность их произведения равна произведению вероятностей:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \ .$$

Аналогично можно определить независимость трех, четырех и более событий. Для этого требуют, чтобы вероятность пересечения любого набора этих событий равнялась произведению соответствующих вероятностей.

Последнее равенство называют еще **формулой умножения вероятностей для независимых событий**. Его часто используют в задачах, где требуется найти вероятность пересечения независимых событий.

Пример 6. Каждый из двух охотников попадает в цель с вероятностью 0, 4. Они одновременно выстрелили в одного и того же вальдшнепа. С какой вероятностью вальдшнеп уцелеет? Чтобы вальдшнеп уцелел, должны одновременно произойти два события:

$A_1 =$ {первый охотник промахнулся} и $A_2 =$ {второй охотник промахнулся}.

Поскольку охотники стреляют по вальдшнепу независимо друг от друга, воспользуемся формулой умножения вероятностей для независимых событий:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36 \ .$$

Внимательный читатель наверняка заметил в решении задачи своеобразный порочный круг: с одной стороны, мы определили независимость событий через выполнение равенства

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) \ ,$$

а с другой, говорим: поскольку охотники стреляют независимо, то воспользуемся этим равенством!

Ответ здесь простой: если независимость следует из самого механизма проведения опыта (как в приведенном примере), то формулой умножения можно пользоваться, чтобы найти вероятность пересечения событий; если независимость не следует из самого механизма, то ее можно доказать только проверив, выполняется ли соответствующее равенство.

Пример 7. Из натуральных чисел от 1 до 10 наудачу выбирают одно число. Будут ли события A = {выбранное число будет делиться на 2} и B = {выбранное число будет делиться на 5} независимыми?

Для ответа на вопрос представим все события как множества благоприятных исходов:

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\};$$

$$B = \{5, 10\};$$

$$A \cap B = \{10\}.$$

Отсюда

$$P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2};\ P(B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5};\ P(A \cap B) = \frac{1}{10}.$$

Поскольку $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$, то события A и B независимы, хотя утверждать это без проверки приведенного равенства было бы рискованно — достаточно вспомнить пример 4.

* * *

В предыдущем разделе мы рассмотрели формулу сложения вероятностей в двух ее видах — для несовместных событий и для произвольных. Такая же ситуация с формулой умножения вероятностей. Она также имеет две разновидности — для независимых событий и для произвольных.

Формула умножения вероятностей для произвольных событий выглядит так:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A),$$

и получается непосредственно из определения условной вероятности. Отметим, что пользоваться ею можно только в том случае, если событие A

имеет ненулевую вероятность (иначе будет не определена условная вероятность).

В этой формуле тоже есть некий порочный круг: выше мы ввели определение условной вероятности как отношения $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$, а теперь предлагаем вычислять вероятность пересечения через условную вероятность. Но, как и с независимостью событий, здесь есть простое объяснение: формулой умножения можно пользоваться, если условную вероятность $P(B\,|\,A)$ можно посчитать, минуя ее формальное определение: как вероятность события B в новых условиях, возникших после наступления A.

<u>Пример 8</u>. Коля подготовил к экзамену 15 вопросов из 20. С какой вероятностью в билете, который содержит два вопроса, он будет знать оба вопроса? Рассмотрим два события:

A_1 = {Коля знает первый вопрос};

A_2 = {Коля знает второй вопрос}.

Очевидно, что в задаче требуется найти вероятность их пересечения. Воспользуемся для этого формулой произведения вероятностей:

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2\,|\,A_1)=\frac{15}{20}\cdot\frac{14}{19}\approx 0{,}55\,.$$

Дробь $\dfrac{14}{19}$ возникает здесь как вероятность события A_2 в новых условиях: событие A_1 произошло, значит, осталось 19 вопросов, из которых Коля выучил 14.

Отметим, что если бы в этой задаче мы считали события A_1 и A_2 независимыми, то ошибка была бы не такой уж большой:

$$P(A_1\cap A_2)=P(A_1)\cdot P(A_2)=\frac{15}{20}\cdot\frac{15}{20}\approx 0{,}56\,.$$

Это можно объяснить тем, что события A_1 и A_2«слабо зависимы».

* * *

В заключение, выведем еще одну замечательную формулу, которая позволит нам находить *вероятность объединения независимых событий*. Пусть события A и B независимы.

Тогда

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) .$$

Доказательство основано на следующем замечательном равенстве

$$A \cup B = \overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} ,$$

которое несложно получить с помощью элементарных рассуждений или диаграммы Эйлера. Используя формулу вероятности противоположного события и независимость $\overline{A}$ и $\overline{B}$, получаем:

$$P(A \cup B) = P(\overline{\overline{A \cup B}}) = P(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) .$$

Формула легко обобщается на случай произвольного числа независимых событий:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot ... \cdot P(\overline{A}_k) .$$

Пример 9. Билет лотереи «Спринт» выигрывает с вероятностью 0, 3. Коля купил сразу три таких билета. Какова вероятность, что хотя бы один из них выиграет?

Обозначим через A_1, A_2, A_3 события «выиграет 1-й билет», «выиграет 2-й билет» и «выиграет 3-й билет». В задаче нужно найти вероятность их объединения. События можно считать независимыми, поэтому

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= 1 - 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 1 - 0,343 = 0,657.$$

Вопросы и задачи

К разделу 1

1. Какое событие называется противоположным? Как связаны вероятности событий A и $\overline{A}$? Какое событие будет противоположным к $\overline{A}$?

2. Из коробки, в которой лежат 2 красных, 2 желтых и 2 зеленых шара, извлекают 2 шара. Рассмотрим следующие четыре события:

A = {оба шара красные};

B = {среди вынутых шаров нет красных};

C = {по крайней мере один из шаров красный};

D = {ровно один из вынутых шаров красный}.

Найдите среди них взаимно противоположные и вычислите их вероятности.

3. Монету подбрасывают 6 раз. Событие A записано как подмножество исходов:

$$A = \{\text{ОРОРОР, РОРОРО}\}.$$

Найдите $P(\overline{A})$.

4. Сколько раз надо бросить кубик, чтобы вероятность появления хотя бы одной шестерки была больше $\frac{1}{2}$?

<u>Совет</u>: рассмотрите событие, противоположное к событию A = {в N бросаниях кубика выпала хотя бы одна шестерка}.

<u>К разделу 2</u>

5. Что такое объединение событий? Что такое пересечение событий?

6. Бросают кубик. Найдите все возможные попарные объединения и пересечения следующих событий:

A = {выпадет простое число};

B = {выпадет четное число};

C = {выпадет 1 или 6}.

7. Случайный эксперимент представляет собой очередной футбольный матч «Спартак» — «Динамо». Изобразите на диаграмме Эйлера, как соотносятся между собой следующие события:

A = {«Спартак» не проиграет};

B = {«Динамо» не проиграет};

C = {в игре будет забито не более одного мяча}.

Покажите на этой диаграмме, куда попадают следующие исходы матча:

$$0 : 0,\ 1 : 0,\ 0 : 1,\ 1 : 1,\ 2 : 0,\ 0 : 2,\ 2 : 2.$$

8. Из колоды с 36 картами случайно вынимают одну карту. Рассмотрим события:

A = {вытянут короля};

B = {вытянут даму};

C = {вытянут пику};

D = {вытянут красную масть}.

Найдите количество элементарных исходов в каждом из следующих событий:

а) $(A \cap C) \cup B$; б) $A \cap (C \bigcup B)$; в) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$; г) $A \cup B \cup C \cup D$.

К разделу 3

9. Какие события называются несовместными? Как вычислить вероятность объединения несовместных событий? А в общем случае?

10. У случайного прохожего узнают дату его рождения. Какие из следующих событий попарно несовместны:

$$A = \{\text{он родился летом}\};$$

$$B = \{\text{он родился в феврале}\};$$

$$C = \{\text{он родился 29 февраля}\};$$

$$D = \{\text{он родился в 2005 году}\}.$$

11. Бросают 5 монет. Какова вероятность, что число «орлов» будет нечетно? Изменится ли ответ, если бросают 6 монет?

12. Известно, что $P(A) = 0{,}6$ и $P(B) = 0{,}6$. В каких границах может лежать $P(A \cup B)$?

К разделу 4

13. Какие события называются независимыми? Как вычислить вероятность пересечения независимых событий? А в общем случае?

14. Могут ли два события A и B быть одновременно несовместными и независимыми? Если да, то в каком случае?

15. Бросают кубик. Пусть событие A состоит в том, что на кубике выпадет четное число. Приведите пример события, связанного с этим экспериментом и при этом а) независимого от A; б) зависимого от A.

16. Из чисел от 1 до N наугад выбираются два числа. Выясните, будут ли независимыми события

$$A = \{\text{выбранное число делится на 2}\};$$

$$B = \{\text{выбранное число делится на 3}\},$$

при $N = 10, 11, 12$.

17. Экспериментально было установлено, что канцелярская кнопка падает на пол острием вверх с вероятностью 0, 6, а острием вниз — с вероятностью 0, 4. С какой вероятностью подброшенные вверх 2 кноп-

ки упадут на одну и ту же сторону? Сравните этот результат с подбрасыванием двух монет. Попробуйте объяснить разницу.

18. В шкафу находится 4 пары ботинок с 42-го по 45-й размеры. Из них случайно выбирают два ботинка. С какой вероятностью это окажется пара 45-го размера? Решите задачу двумя способами: с помощью формулы произведения (для зависимых событий) и через подсчет всех возможных исходов опыта.

19. Среди билетов лотереи «Спринт» около 20% выигрышных. Сколько билетов нужно купить, чтобы вероятность хоть что-нибудь выиграть была больше 0, 5?

Методические замечания

Основная школа. Множество. Элемент множества, подмножество. Объединение и пересечение множеств. Диаграммы Эйлера.

Старшая школа. Элементарные и сложные события. Рассмотрение случаев и вероятность суммы несовместных событий, вероятность противоположного события. Понятие о независимости событий.

К разделу 1

Теоретико-множественный подход в свое время лег в основу аксиоматического построения теории вероятностей (см. [29]) и превратил ее в полноценную математическую дисциплину. Учитывая появление элементов теории множеств в стандартах школьного образования, этот подход невозможно обойти при изучении случайных событий и свойств вероятностей.

Материал лекции может быть разделен между основной и старшей школой. В основной школе рассматриваются *теоретико-множественные операции* над событиями: дополнение, объединение, пересечение. В старшей школе изучается *поведение вероятностей под действием этих операций*, рассматриваются важнейшие для всей теории понятия *несовместных* и *независимых* событий.

Первый раздел посвящен простейшей одноместной операции — дополнению. На языке событий это означает переход к противоположному событию. Вообще *использование двух языков* — естественного и теоретико-множественного — является прекрасным средством развития логического мышления, формирует у учащихся умение переходить от реальных ситуаций к их математическим моделям. Вот почему, начиная с этого раздела и на протяжении всей лекции, мы рекомендуем рассматривать параллельно два взгляда на любую операцию: формальный теоретико-множественный, в рамках которого каждое событие — это подмножество в Ω, и естественный, использующий словесное описание события.

После определения операции дополнения и рассмотрения примеров выясняется, как ведет себя вероятность при применении данной операции. Приводится обоснование формулы для вероятности противоположного события. Отметим, что при аксиоматическом построении эта формула является элементарным следствием аксиомы аддитивности. Но поскольку в школьном курсе, следуя [1]—[4], мы рекомендуем использовать частотный подход, то и обоснование всех формул здесь и в дальнейшем мы ищем именно в рамках этого подхода.

Хорошо известным средством для наглядного изображения всех операций над множествами служат диаграммы Эйлера, которые мы также вводим в этом разделе. В дальнейшем с помощью диаграмм демонстрируются различные свойства операций и вероятностей.

<u>К разделу 2</u>

В этом разделе рассматриваются две основные операции над событиями — объединение и пересечение. Следуя упомянутому выше «двойственному» взгляду на события, мы рассматриваем два определения каждой операции — формальное теоретико-множественное и естественное словесное.

Важно, чтобы при рассмотрении примеров и задач учащиеся почувствовали преимущества теоретико-множественного подхода при определении результатов объединения и пересечения. Зачастую именно формальное представление событий как подмножеств в Ω позволяет безошибочно найти результаты применения любых операций и однозначно их записать; в то время как словесное описание этих результатов может быть весьма запутанным и вызывать у учащихся затруднения логического или даже лингвистического плана.

<u>К разделу 3</u>

Следуя «двойственной» природе случайных событий, понятие несовместности можно рассматривать с двух точек зрения: это события, которые не могут произойти одновременно (естественный язык); это непересекающиеся множества (теоретико-множественный язык). В любом случае говорить о несовместности событий можно только в рамках одного и того же эксперимента. При теоретико-множественном подходе это кажется очевидным (все события — подмножества одного и того же множества Ω), а при естественном может легко привести к самым неожиданным парадоксам (см., например, [25]).

С несовместными событиями связано важнейшее свойство вероятности — свойство *аддитивности*. Коротко его можно сформулировать так: вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей. В аксиоматической теории это является одной из аксиом вероятности[1]. При частотном подходе мы обосновываем эту формулу через очевидное соотношение между частотами несовместных событий и их объединения.

В конце раздела формула сложения вероятностей обобщается на случай совместных событий. Выясняется, что для ее использования нужно вычислять вероятность пересечения, что естественным образом подводит к материалу следующего раздела.

К разделу 4

Как уже было сказано в самой лекции, понятие независимости играет фундаментальную роль во всей теории вероятностей. На нем основаны наиболее известные результаты этой теории, нашедшие широкое использование в приложениях и превратившие ее в одну из самых популярных математических дисциплин.

Формально независимость означает выполнение соотношения

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)\ . \qquad (*)$$

Сложный вопрос методического плана — как прийти к этой формуле наиболее естественным образом? Если несовместность легко выражается в обычных теоретико-множественных терминах (несовместные ≡ непересекающиеся), то у независимости такого аналога просто нет. Показать независимость на диаграмме Эйлера весьма затруднительно, поскольку для этого должны выполняться количественные соотношения между вероятностями. В то же время независимость имеет вполне определенный смысл на обычном языке и означает *отсутствие какого-либо взаимного влияния событий друг на друга*.

Многие авторы предпочитают не тратить время на обсуждение этого вопроса и либо дают формальное определение независимости в виде (*),

[1] Если быть более точным, аксиома звучит так: вероятность счетного объединения попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей.

либо вообще оставляют это понятие неопределяемым, а соотношение (*) выдают за некую теорему. На наш взгляд, истина лежит, как всегда, посередине. Формальное определение независимости (*) — как единственно верное с математической точки зрения — нужно, кончено, оставить.

Учащимся же нужно в любом случае обязательно объяснить, что естественное понимание независимости совпадает с формальным в том случае, если речь идет о событиях, связанных:

• с разными объектами, участвующими в эксперименте и не влияющими друг на друга (бросаем два разных кубика) ;

• с разными этапами одного и того же эксперимента, не влияющими друг на друга (два раза подряд бросаем кубик).

В этом случае независимость следует из самой природы опыта, и формулу $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ *можно применять для вычисления вероятности пересечения событий.*

Если же рассматриваются два события, связанные с одним и тем же объектом или этапом эксперимента (примеры 4 и 7 из лекции), независимость ниоткуда не следует, и тогда ее *нужно доказывать или опровергать, проверяя, выполняется ли эта формула.*

В нашей лекции мы приходим к формуле (*) самым естественным образом, принятым во всей учебной литературе, — через *условную вероятность*. При этом приходится вводить лишнее понятие, которого нет в стандартах. Такой способ, разумеется, требует дополнительных затрат времени, но окупается более глубоким пониманием сути изучаемых явлений.

Раздел заканчивается обобщением формулы умножения вероятностей на произвольные (зависимые) события. Это еще один довод за рассмотрение условной вероятности. Формула, которая кажется очевидным следствием определения условной вероятности, оказывается удобным инструментом для решения многих задач, в которых проводится многоэтапный эксперимент, т.е. эксперимент, состоящий из нескольких действий, следующих во времени друг за другом.

В заключение отметим, что появление в этом разделе значительного количества новых формул открывает новые возможности для решения задач — теперь многие из них могут быть решены разными методами, что и демонстрируется в приведенных в лекции примерах.

Лекция 4
Случайные величины

В этой лекции мы познакомимся с одним из важнейших во всей теории вероятностей понятием случайной величины. Рассмотрим различные виды случайных величин и научимся описывать их поведение.

Скажем сразу, что материал этой лекции выходит за рамки нынешнего стандарта школьного математического образования. Однако знакомство с ним необходимо учителю по нескольким причинам:

• во-первых, авторы многих современных учебников и учебных пособий для средней школы включают этот материал в свои пособия;

• во-вторых, без понятия случайной величины невозможно полноценное овладение основными статистическими понятиями (выборка, таблица частот, числовые характеристики выборки и т.д.);

• наконец, в-третьих, материал этой лекции может быть использован для разработки элективных курсов.

1. Понятие случайной величины

Напомним, что случайным событием мы договорились называть любое событие, связанное со случайным экспериментом. Случайным оно называется потому, что до эксперимента невозможно точно сказать, произойдет оно или не произойдет, — это выясняется только тогда, когда эксперимент завершен.

Совершенно аналогично мы будем называть **случайной величиной** любую числовую величину, связанную со случайным экспериментом. Случайной она называется потому, что до эксперимента невозможно точно предсказать то значение, которое эта величина примет в результате эксперимента — это выясняется только тогда, когда эксперимент завершен. Проводя эксперимент многократно, можно наблюдать за поведением случайной величины, фиксируя те значения, которые она будет принимать.

Располагая определенной информацией, о которой пойдет речь ниже, можно с некоторой степенью уверенности предсказывать поведение случайной величины, что по понятным причинам имеет большое практическое значение.

Пример 1. «Два кубика». Рассмотрим эксперимент с подбрасыванием двух кубиков. Он имеет 36 равновозможных исходов, каждый из которых можно закодировать парой чисел, выпавших на первом и втором кубиках. Введем следующие величины:

X — число очков на первом кубике;

Y — число очков на втором кубике;

S — сумма очков на двух кубиках;

P — произведение очков на двух кубиках;

M — максимальное из двух чисел на кубиках.

Значение любой из этих пяти величин связано с указанным экспериментом. Пусть, например, эксперимент завершился исходом (3; 2). Тогда перечисленные величины приняли следующие значения:

$$X = 3;\ Y = 2;\ S = 5;\ P = 6;\ M = 3.$$

При другом исходе эксперимента эти значения будут другими. Для каждого из 36 возможных исходов эксперимента можно точно указать значение каждой из перечисленных выше величин. В нашем опыте это удобно сделать с помощью таблиц. Вот так, например, будет выглядеть таблица значений случайной величины S, равной сумме значений на двух кубиках:

1-й кубик \ 2-й кубик	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Аналогичные таблицы можно без труда составить для остальных величин, приведенных в примере (см. задание 3 к этому разделу).

Таким образом, *случайная величина представляет собой функцию, определенную на множестве всех возможных исходов опыта*: областью определения этой функции является множество Ω, а значениями — числа (целые или действительные). Для каждого исхода случайная величина имеет вполне определенное (неслучайное) значение. Но поскольку исход опыта заранее неизвестен, то и значение, которое примет эта величина в любом опыте, заранее неизвестно, случайно.

* * *

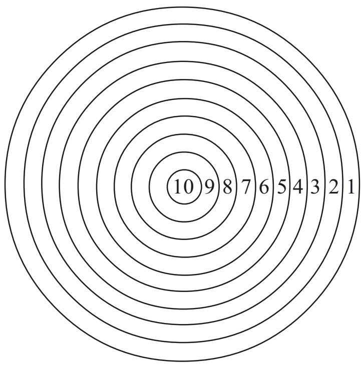
Когда число возможных исходов опыта велико, табличный способ представления случайных величин становится неудобным. В таком случае можно задавать значения величины на каждом из исходов формулой (если это возможно) или словесным описанием.

Пример 2. «До первого орла». Будем бросать монету до появления первого «орла». Исходом каждого такого эксперимента будет последовательность вида РР...РО, причем буква О в ней может появиться на любом шаге (в том числе и на первом). В качестве случайной величины X рассмотрим количество бросаний, которое придется при этом сделать.

Существенным отличием этого опыта от предыдущего будет *бесконечное количество исходов*. Вот так будет выглядеть таблица возможных значений X, содержащая бесконечное число столбцов:

ω	О	РО	РРО	РРРО	РРРРО	РРРРРО	...
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6	...

Пример 3. «Стрельба по мишени». В круговую мишень, изображенную на рисунке, производятся выстрелы. Будем считать, что радиус центрального круга («десятки») — 5 см, а каждого следующего — на 5 см больше предыдущего.



Исходом опыта в этом эксперименте будет случайная точка в некоторой области на плоскости мишени. Если разместить в центре мишени начало координат, то любой такой исход можно будет представить парой координат соответствующей точки — (x, y). Число случайных исходов в этом опыте не просто бесконечно — оно *несчетно*. Поэтому задать случайную величину на таком множестве исходов с помощью таблицы уже не удастся. Попробуем сделать это с помощью формул:

$$X(x, y) = x;$$

$$Y(x, y) = y;$$

$$R(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$P(x,y) = \begin{cases} 10, \text{ если } R(x, y) \le 5, \\ 9, \text{ если } 5 < R(x, y) \le 10, \\ \quad \dots \\ 1, \text{ если } 45 < R(x, y) \le 50, \\ 0, \text{ если } R(x, y) > 50. \end{cases}$$

Легко сообразить, что случайные величины X и Y представляют собой соответствующие координаты точки попадания, R — расстояние от точки попадания до центра мишени, а P — несмотря на устрашающие формулы, — всего на всего количество выбитых очков.

Пример 4. «Биометрия». Рассмотрим случайный эксперимент, состоящий в определении биометрических параметров человека. Исходом такого эксперимента является некоторый набор показаний, снятых с помощью соответствующего медицинского оборудования. Случайными величинами, которые наверняка будут присутствовать в этом наборе, можно считать

X — рост человека; Y — вес человека; Z — возраст человека и др.

На основе одних величин можно строить новые. Так, например, величину

$$Q = Y - (X - 100)$$

можно рассматривать как избыточный вес.

* * *

Итак, мы выяснили, что способ описания случайной величины во многом зависит от того, на каком множестве исходов (т.е. для какого эксперимента) она определена. Но уже в следующем разделе мы увидим, что более существенное различие между случайными величинами проходит не по их *области определения*, а по *множеству значений*: есть величины, которые могут принимать всего несколько возможных значений, а есть такие, у которых это множество бесконечно. Посмотрим на приведенные выше примеры случайных величин с этой точки зрения:

Случайный эксперимент	Количество исходов	Случайная величина	Количество значений
«Два кубика»	36	X	6
		Y	6
		S	11
«До первого орла»	∞ (счетно)	X	∞ (счетно)
«Стрельба по мишени»	∞ (несчетно)	X	∞ (несчетно)
		Y	∞ (несчетно)
		R	∞ (несчетно)
		S	11

Мы умышленно не внесли в эту таблицу величины из последнего примера — рост, вес, возраст. Дело в том, что количество возможных значений для них существенно зависит от условий эксперимента. Теоретически любая из этих величин имеет бесконечно много возможных значений. На практике же количество этих значений определяется точностью, с которой проводятся измерения. Так, например, рост измеряется обычно с точностью до см, поэтому возможных значений величины X в этом случае будет не больше 200.

2. Закон распределения случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины

Итак, чтобы полностью охарактеризовать случайную величину, нужно указать, какое значение она принимает на каждом из элементарных исходов опыта. Но это не всегда удобно: исходов, как мы видели, может быть много (или даже бесконечно много), и задать значение случайной величины на каждом из них с помощью таблицы или каким-то другим простым методом будет уже невозможно.

К счастью, во многих ситуациях столь подробного описания случайной величины не требуется — достаточно знать, какие значения она может принимать и каковы их вероятности. Эта информация называется **законом распределения случайной величины**. Закон распределения можно задавать разными способами. Главное, чтобы он содержал всю информацию о значениях, которые может принимать величина, и их вероятностях. Если этих значений конечное число, то удобнее всего представить закон распределения в виде таблицы:

Значение	x_1	x_2	...	x_n
Вероятность	p_1	p_2	...	p_n

Не путайте эту таблицу с теми, которые появлялись в первом разделе: там они использовались для задания самой случайной величины как функции на множестве исходов; здесь — для ее закона распределения. Поскольку в законе распределения учитываются все возможные значения данной величины, то сумма соответствующих им вероятностей должна быть равна 1:

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

(это немедленно следует из формулы для вероятности объединения несовместных событий и из $P(\Omega) = 1$).

Посмотрим, как будут выглядеть законы распределения для некоторых величин из примеров предыдущего раздела.

Пример 1. «Два кубика». Закон распределения случайной величины X:

Значение	1	2	3	4	5	6
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

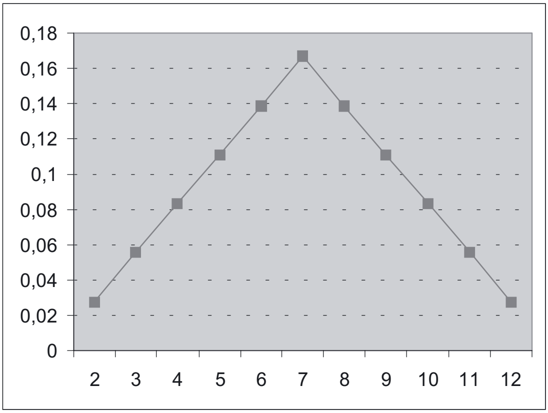
Как видим, все значения, которые может принимать величина X, равновозможны. Такое распределение называется **равномерным**. Закон распределения случайной величины Y, очевидно, будет точно таким же.

На этом примере мы видим, что *у разных случайных величин законы распределения могут совпадать*.

Закон распределения случайной величины S:

Значение	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Здесь значения имеют разную вероятность. Такой закон уже интересно изобразить с помощью графика:



По оси x отложены возможные значения случайной величины S, по оси y — их вероятности. Поскольку возможных значений всего 11, график представляет собой множество из 11 точек, которые для наглядности соединены отрезками. Законы распределения случайных величин P и M вы найдете в задаче 7.

Пример 2. «До первого орла». Закон распределения случайной величины X, как мы уже видели, будет содержать бесконечное количество значений. Соответствующая таблица тоже будет бесконечной, поэтому мы сможем заполнить только ее начало:

Значение	1	2	3	4	5	...
Вероятность	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	...

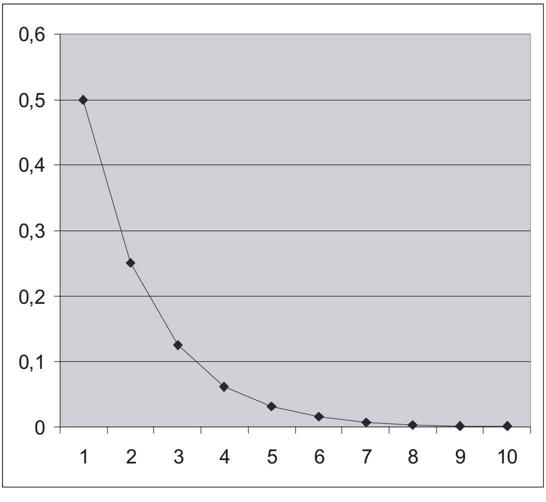
Однако при заполнении первых столбцов можно заметить закономерность и доказать общую формулу: $P\{X=k\}=\frac{1}{2^k}$. Словами эту формулу можно прочитать так: «вероятность того, что случайная величина X примет значение k равна $\frac{1}{2^k}$». Интересно, что для бесконечной таблицы сохраняется уже знакомое нам равенство

$$p_1+p_2+p_3+\ldots=1\,.$$

Только сумма теперь бесконечная. В математике такие бесконечные суммы называются *рядами*. Разумеется, в школе они не изучаются. Однако частный случай такого бесконечного ряда, а именно, *бесконечная геометрическая прогрессия*, есть даже в школьной программе. Именно такая прогрессия получится в нашем случае:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 2=1$$

На графике этот закон будет выглядеть так (ось x является для него горизонтальной асимптотой):



* * *

Рассмотренные в примерах 1 и 2 случайные величины и законы распределения принято называть **дискретными**. Дискретные величины могут принимать лишь конечное (пример 1) или счетное (пример 2) множество значений. Для таких величин закон распределения задается либо таблицей, либо общей формулой, выражающей вероятность произвольного значения данной величины. Кроме того, дискретный закон распределения, как мы видели, может быть представлен графически.

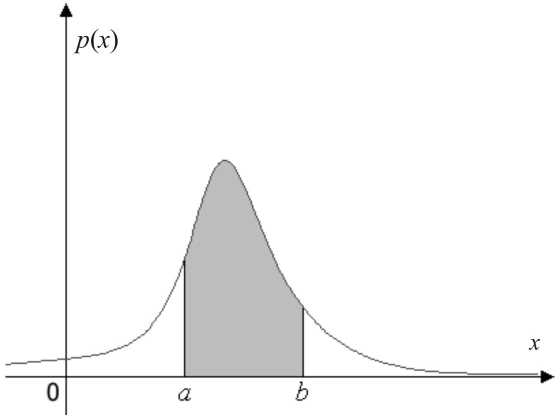
Теперь перейдем к рассмотрению случайных величин из примера 3. Величины X, Y и R, в отличие от рассмотренных, могут принимать произвольные значения из некоторого интервала. Множество таких значений уже не просто бесконечно — оно *несчетно*. Такие случайные величины называются **непрерывными** (на самом деле, в математике они называются *абсолютно непрерывными*, но мы не будем усложнять и так непростую терминологию).

Задать закон распределения для непрерывной величины с помощью таблицы уже невозможно — ведь ее значения нельзя даже *перечислить.* Указать формулу, которая задает вероятность каждого из возможных значений этой величины, тоже не удастся — каждое свое значение она принимает с вероятностью 0. С ненулевой вероятностью такая величина может попасть только в некоторый интервал, а не в фиксированную точку. На самом деле это не должно вас сильно удивлять — вспомните геометрическую вероятность. Ведь там тоже вероятность попадания в любую точку области была равна нулю, а вероятность попадания в область — ненулевая.

Как же все-таки задать закон распределения в этом случае? Оказывается, наиболее удобным способом в этом случае будет использование такого понятия, как **плотность вероятности**. В некотором смысле это понятие аналогично понятию плотности вещества в физике, только в качестве «вещества» берется вероятность. Плотностью вероятности (или плотностью распределения вероятности) непрерывной случайной величины X называется такая функция $p(x)$, для которой при любых a и b выполняется равенство

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b p(x)dx.$$

Не удивляйтесь, это самый обыкновенный (а точнее, определенный) интеграл — к сожалению, без него здесь не обойтись. Значит, чтобы узнать вероятность попадания случайной величины X в любой промежуток (а на самом деле — в любое множество) достаточно проинтегрировать плотность вероятности по этому промежутку (множеству):



Чем больше плотность вероятности в окрестности какой-нибудь точки, тем выше вероятность того, что случайная величина примет значение из этой окрестности. На роль плотности может претендовать далеко не любая функция $p(x)$. От нее требуется выполнение двух требований:

1) $p(x) \geq 0;$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$

Первое нужно, чтобы вероятность попадания случайной величины в любой интервал была, по крайней мере, неотрицательной. Второе — чтобы вероятность того, что случайная величина хоть чему-нибудь будет равна, равнялась 1. Как видите, требования вполне обоснованные.

Вернемся к величинам из примера 3 и попробуем найти для них законы распределения.

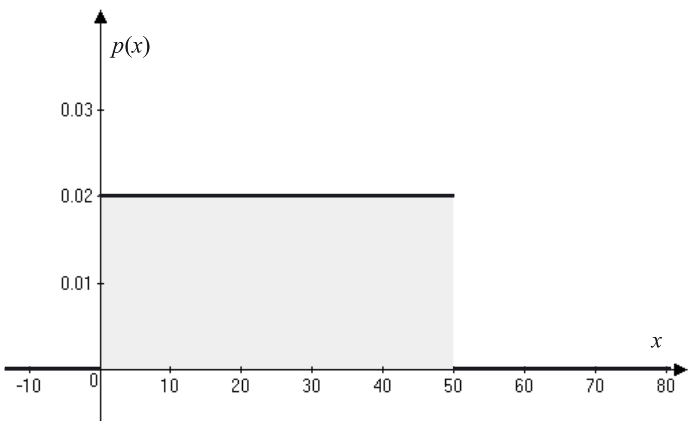
<u>Пример 3</u>. «Стрельба по мишени». В этом примере величины X, Y, R — очевидно, непрерывные; величина P — дискретная. Чтобы получить плотность распределения для X, Y и R, нужно сделать хоть какие-то предположения о том, как ведется стрельба по мишени.

Предположим, что попадание в любую точку самого большого круга мишени (его радиус 50 см) равновозможно. Другими словами, будем считать, что мы имеем дело с геометрической вероятностью — точка попадания выбирается наугад в круге радиуса 50 см. Конечно, для прицельной стрельбы по мишени данная модель далека от реальности: если стрелок хороший, то попадание ближе к центру будет более вероятно; если стрелок плохой — он может не попасть и в самый большой круг (пуля уйдет «в молоко»). Тем не менее рассмотрим для начала хотя бы эту ситуацию.

Чтобы не осложнять изложение техническими трудностями, покажем, как находится плотность распределения вероятности только для одной из названных величин — а именно, для R — расстояния до центра мишени. Очевидно, что при сделанных предположениях R может принять любое значение из промежутка от 0 до 50. На первый взгляд, все значения R из этого промежутка равновозможны, и плотность вероятности должна быть одинаковой на всем отрезке:

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{50} & \text{при } x\in[0;50],\\ 0 & \text{при } x\notin[0;50].\end{cases}$$

Такое распределение, как и в дискретном случае, называется **равномерным**. Его график представляет собой «ступеньку»:



Высота ступеньки зависит от величины интервала и выбирается так, чтобы площадь под ней равнялась 1. Однако распределение случайной величины R в наших условиях не будет равномерным! Чтобы показать это, найдем вероятность того, что R лежит в некотором интервале от a до b. Это означает, что пуля попала в кольцо с внутренним радиусом a и внешним радиусом b. По определению геометрической вероятности нужно найти отношение площади такого кольца к площади всего круга радиуса 50 см:

$$P(a \le R \le b) = \frac{\pi \cdot b^2 - \pi \cdot a^2}{\pi \cdot 50^2} = \frac{b^2 - a^2}{50^2}$$

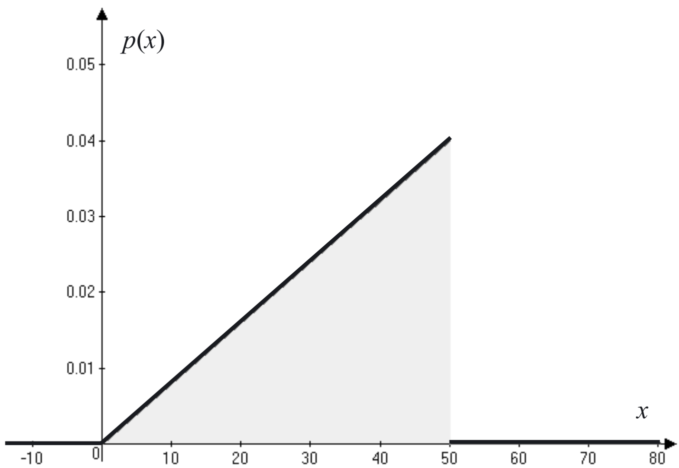
(естественно, в предположении, что $0 \le a \le b \le 50$). Остается найти такую функцию, чтобы

$$\int_a^b p(x)dx = \frac{b^2 - a^2}{50^2}.$$

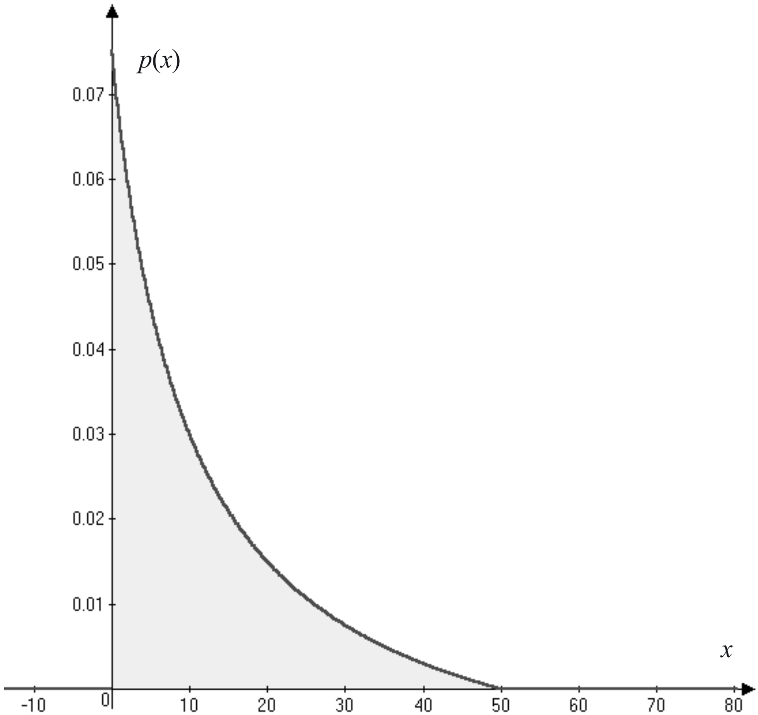
Те кто хорошо учил математический анализ, вспомнят, что можно продифференцировать это тождество по параметру b и получить выражение для $p(x)$:

$$p(x) = \frac{2x}{50^2} \text{ при } x \in [0; 50].$$

Вне отрезка [0; 50] плотность, естественно, равна 0. Вот так будет выглядеть график $p(x)$:



Площадь под графиком, как и положено, равна 1. Из графика видно, что большие значения R более вероятны, чем меньшие. На первый взгляд результат неожиданный — ведь попадание во все точки мишени по нашему предположению равновозможно. Но на самом деле никакого противоречия здесь нет, поскольку геометрическая вероятность пропорциональна площади, а площади колец одинаковой толщины уменьшаются с уменьшением радиуса. Так что даже для получения равномерной плотности для величины R нужно стрелять прицельно. А плотность вероятности на следующем рисунке говорит уже об очень высоком классе стрелка:



Закон распределения величины P из этого примера вы найдете в задаче 8.

Что касается законов распределения случайных величин из примера 4, то лучше всего получить их экспериментально, проделав серию опытов и заполнив по их результатам соответствующие таблицы. Мы еще вернемся к такому способу, когда будем изучать методы математической статистики. Интересно, что при самых общих предположениях об условиях эксперимента распределение таких величин, как рост, вес и многих других, будет подчиняться одному и тому же закону распределения — *нормальному закону*. К этому замечательному факту мы вернемся в самом конце нашего курса.

3. Числовые характеристики случайной величины. Математическое ожидание. Дисперсия

Итак, мы выяснили, что для того, чтобы охарактеризовать поведение случайной величины, не обязательно знать ее значение для каждого из возможных исходов опыта — можно вполне обойтись информацией, которую мы назвали *законом распределения* случайной величины. Для дискретных величин эту информацию удобно представлять в виде таблицы, для непрерывных — в виде функции $p(x)$, называемой плотностью распределения.

Можно пойти еще дальше и сократить количество информации до минимума, заменив закон распределения всего одним или несколькими числами. Конечно, много полезной информации будет при этом потеряно. Но если числовые характеристики выбраны удачно, то они могут стать «квинтэссенцией», содержащей наиболее важную информацию о поведении случайной величины.

Обратившись к повседневному опыту, нетрудно догадаться, что наиболее важной числовой характеристикой случайной величины является ее среднее значение, или, как говорят в теории вероятностей, математическое ожидание случайной величины. Посмотрим, каким образом можно было бы его определить. Начнем с дискретных величин. Пусть величина X имеет следующий закон распределения:

Значение	x_1	x_2	...	x_n
Вероятность	p_1	p_2	...	p_n

Что можно считать ее средним значением? Казалось бы, наиболее естественный способ — взять среднее арифметическое всех возможных значений x_i. Но тогда не будут учтены их вероятности, а ведь какие-то из

x_i более вероятны и, значит, должны внести больший вес в формирование среднего значения. В теории вероятностей **средним значением** или **математическим ожиданием** дискретной случайной величины X называют число

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + ... + x_n p_n .$$

Как видите, каждое из возможных значений входит в это выражение со своим весом, равным соответствующей вероятности. Обозначение $E(X)$ происходит от английского слова *expectation* — ожидание.

Если возможных значений $x_i x_i$ счетное число, то сумма становится бесконечной, то есть превращается в числовой ряд. Ряды, как вы, наверное, помните, сходятся уже далеко не всегда, поэтому не всякая случайная величина имеет конечное математическое ожидание.

Для непрерывных величин ситуация еще сложнее — здесь для вычисления математического ожидания приходится снова привлекать понятие интеграла:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx.$$

Сравнивая данное выражение с его дискретным аналогом, нетрудно увидеть в этом интеграле все ту же «сумму» всех возможных значений случайной величины, взвешенную их вероятностями.

Найдем математические ожидания случайных величин, рассмотренных в предыдущих разделах.

Пример 1. «Два кубика». Поскольку X и Y имеют одинаковый закон распределения, то их математические ожидания совпадают:

$$E(X) = E(Y) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Получается, что в среднем на каждом из кубиков выпадает по три с половиной очка? Как ни странно, это именно так. Среднее значение может не совпадать ни с одним из возможных значений случайной величины. О том, как можно интерпретировать значение 3, 5 на практике, мы поговорим в заключительном разделе этой лекции.

А теперь найдем математическое ожидание суммы очков на двух кубиках:

$$E(S) = 2\cdot\frac{1}{36} + 3\cdot\frac{2}{36} + 4\cdot\frac{3}{36} + 5\cdot\frac{4}{36} + 6\cdot\frac{5}{36} + 7\cdot\frac{6}{36} + 8\cdot\frac{5}{36} + 9\cdot\frac{4}{36} +$$
$$+10\cdot\frac{3}{36} + 11\cdot\frac{2}{36} + 12\cdot\frac{1}{36} = 7.$$

Полученный результат можно было угадать, глядя на график закона распределения случайной величины S: он абсолютно симметричен относительно значения 7. Если закон распределения симметричен относительно некоторого числа a, то оно и будет математическим ожиданием этой величины.

Пример 2. «До первого орла». Здесь случайная величина X хоть и дискретная, но имеет бесконечное число возможных значений, поэтому математическое ожидание будет равно бесконечной сумме

$$E(X) = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{1}{16} + 5\cdot\frac{1}{32} + \ldots$$

Для вычисления этой суммы нам придется использовать одно замечательное равенство, которое мы сейчас докажем:

$$1 + 2p + 3p^2 + 4p^3 + \ldots = \frac{1}{(1-p)^2} \quad \text{при } |\, p \,| < 1.$$

Выражение напоминает сумму бесконечной геометрической прогрессии, но перед каждым членом прогрессии стоит свой коэффициент. Перегруппируем слагаемые в этой бесконечной сумме (обоснование этого шага можно найти в курсе математического анализа):

$$(p + p^2 + p^3 + \ldots) + (p^2 + p^3 + \ldots) + (p^3 + \ldots) + \ldots =$$
$$= \frac{1}{1-p} + \frac{p}{1-p} + \frac{p^2}{1-p} + \ldots = \frac{1}{(1-p)^2}.$$

Равенство доказано. Вернемся к подсчету математического ожидания:

$$E(X) = \frac{1}{2}\cdot(1 + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 5\cdot\frac{1}{16}\ \ldots) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 2.$$

Как видите, даже величина, способная принимать неограниченно большие значения, вполне может иметь конечное (и очень небольшое!) математическое ожидание. Понятно, по какой причине это происходит в нашем примере: вероятности больших значений очень быстро убывают.

И наконец, пример 3, в котором величины имеют непрерывные распределения.

Пример 3. «Стрельба по мишени». Найдем математическое ожидание случайной величины R:

$$E(X)=\int_0^{50} x\cdot\frac{2x}{50^2}dx=\left.\frac{2x^3}{3\cdot 50^2}\right|_0^{50}=\frac{2\cdot 50^3}{3\cdot 50^2}=\frac{100}{3}\approx 33{,}33.$$

Заметьте, что математическое ожидание получилось значительно больше 25 см. Попробуйте угадать, каким бы оно было при равномерном распределении R на отрезке [0; 50] (см. задание 18).

* * *

Главным недостатком приведенного определения математического ожидания является его зависимость от типа случайной величины: для дискретных величин это сумма, для непрерывных — интеграл. Борьба с этим «изъяном» привела в свое время к появлению нового определения интеграла, предложенного А.Лебегом. С точки зрения интеграла Лебега и конечная сумма, и интеграл в привычном понимании являются частными случаями общего понятия интеграла. Но обсуждение этого вопроса оказывается далеко за рамками нашего курса.

В заключение отметим некоторые свойства математического ожидания, которые можно вывести из его определения (вывод придется проводить отдельно для дискретных и отдельно для непрерывных величин):

1) математическое ожидание константы k равно ей самой: $E(k) = k$;

2) если k — произвольное число, то $E(k\cdot X) = k\cdot E(X)$;

3) для любых случайных величин X и Y выполняется равенство

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

Два последних свойства делают математическое ожидание линейной функцией на множестве случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание. Кроме этого имеет место еще одно замечательное свойство, которое *выполняется уже не для всех, а лишь для независимых случайных величин*:

$$E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y).$$

Независимость величин имеет тот же смысл, что и независимость случайных событий (см. предыдущую лекцию), но останавливаться на этом понятии более подробно мы не будем.

Приведенные свойства математического ожидания могут значительно облегчить его подсчет. Вернемся к примеру «Два кубика». Математическое ожидание случайной величины S можно найти, не обращаясь к ее закону распределения:

$$E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 3{,}5 + 3{,}5 = 7.$$

Как видите, этот способ намного короче, чем вычисление $E(S)$ по определению. Помните об этом при решении задач.

* * *

Итак, мы рассмотрели число, которое характеризует поведение случайной величины в среднем. Но среднее значение далеко не всегда дает даже общее представление о поведении случайной величины. Есть еще одна характеристика, которая зачастую несет не менее важную информацию, — это *разброс* (или *рассеивание*) случайной величины вокруг ее среднего значения. Вспомним известную шутку о том, что средняя температура по больнице, 36,6°. Ведь это вполне может быть так, если часть больных имеет повышенную температуру, а часть пониженную. Тогда чем же будет отличаться поведение случайной величины, равной температуре больного человека, от поведения величины, равной температуре здорового? И та, и другая величины подвержены колебаниям вокруг некоторого среднего значения (возможно, даже одинакового), но очевидно, что у больных величина этих колебаний будет больше.

Попробуем выяснить, какое выражение может претендовать на роль средней меры рассеивания случайной величины вокруг ее среднего значения. Очевидно, проще всего взять в качестве такой меры среднее отклонение от среднего, то есть

$$E(X - E(X)).$$

К сожалению, в силу свойств математического ожидания эта величина всегда равна нулю:

$$E(X - E(X)) = E(X) - E(E(X)) = E(X) - E(X) = 0$$

(мы воспользовались здесь тем, что среднее значение константы равно ей самой). Этот факт имеет простое объяснение: случайная величина $X - E(X)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, которые компенсируют друг друга и дают в среднем 0. Для получения объективной характеристики разброса необходимо брать все эти отклонения с одним и тем же знаком. Здесь возможны разные варианты — например, взять в качестве меры разброса математическое ожидание модуля отклонения $|X - E(X)|$ или квадрата отклонения $(X - E(X))^2$. В теории вероятностей предпочли остановиться на втором варианте и считать основной мерой рассеивания случайной величины **дисперсию**, равную

$$D(X) = E(X - E(X))^2.$$

Это определение относится ко всем случайным величинам, но для каждого из типов подсчет дисперсии приводит к своей формуле. Обозначим для простоты математическое ожидание случайной величины X через $a = E(X)$. Тогда в соответствии с определением математического ожидания получаем:

- для дискретных величин —

$$D(X) = (x_1 - a)^2 \cdot p_1 + (x_2 - a)^2 \cdot p_2 + (x_3 - a)^2 \cdot p_3 + ... + (x_n - a)^2 \cdot p_n;$$

- для непрерывных величин —

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 \cdot p(x)dx.$$

Из определения дисперсии видно, что она действительно является числовой мерой разброса случайной величины вокруг ее математического ожидания. Однако у дисперсии, в отличие от математического ожидания, есть один существенный недостаток: она измеряется в «квадратных» по отношению к самой случайной величине X единицах. Например, если X измеряется в метрах, то $D(X)$ — в квадратных метрах; если X измеряется в рублях, то $D(X)$ — в «квадратных рублях»… Чтобы избежать такого несоответствия, часто используют другую меру рассеивания, равную квадратному корню из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Эта величина называется **средним квадратичным** или **стандартным отклонением** случайной величины X. Стандартное отклонение, как и математическое ожидание, измеряется в тех же единицах, что и исходная величина X.

* * *

Дисперсия обладает рядом свойств, которые легко получить из ее определения:

1) дисперсия константы равна нулю: $D(k) = 0$;

2) если k — произвольное число, то $D(k \cdot X) = k^2 \cdot D(X)$.

А вот дисперсия суммы будет равна сумме дисперсий уже *не для всех, а лишь для независимых случайных величин*:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

Для вычисления дисперсии часто используется еще одна замечательная формула, которую совсем несложно доказать, используя известные нам свойства математического ожидания:

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

Докажем это равенство:

$$D(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2 - 2 \cdot X \cdot E(X) + (E(X))^2) =$$
$$= E(X^2) - 2 \cdot E(X) \cdot E(X) + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2.$$

А теперь вновь обратимся к примерам рассмотренных ранее случайных величин и вычислим их дисперсии.

<u>Пример 1</u>. «Два кубика». Вычислим дисперсию случайной величины X двумя способами: по определению и по только что доказанной формуле. В обоих случаях нам понадобится уже вычисленное ранее математическое ожидание этой величины — $E(X) = 3{,}5$.

<u>1-й способ</u> (по определению дисперсии):

$$D(X) = (1-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (4-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} +$$
$$+ (5-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (6-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} = 6{,}25 \cdot \frac{1}{6} + 2{,}25 \cdot \frac{1}{6} + 0{,}25 \cdot \frac{1}{6} + 0{,}25 \cdot \frac{1}{6} +$$
$$+ 2{,}25 \cdot \frac{1}{6} + 6{,}25 \cdot \frac{1}{6} = 17{,}5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12}.$$

2-й способ (по формуле для подсчета дисперсии):

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{6} + 5^2 \cdot \frac{1}{6} + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - 3{,}5^2 =$$

$$= 91 \cdot \frac{1}{6} - 3{,}5^2 = \frac{35}{12}.$$

Как видим, вычисление дисперсии вторым способом оказалось значительно проще. Это заставляет некоторых авторов ошибочно принимать свойство дисперсии, выраженное формулой $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, за ее определение.

Как и математическое ожидание, дисперсия полностью определяется законом распределения случайной величины, поэтому $D(Y) = D(X) = \frac{35}{12}$.

А вот для подсчета дисперсии случайной величины S можно воспользоваться одним из свойств дисперсии: нужно вспомнить, что $S = X + Y$, причем величины X и Y очевидным образом независимы. Отсюда

$$D(S) = D(X+Y) = D(X) + D(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6}.$$

Для вычисления дисперсии непрерывных величин приходится вычислять значение интеграла.

Пример 3. «Стрельба по мишени».

$$D(R) = \int_0^{50} x^2 \cdot \frac{2x}{50^2} dx - \left(\frac{100}{3}\right)^2 = \left.\frac{2x^4}{4 \cdot 50^2}\right|_0^{50} - \left(\frac{100}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{2 \cdot 50^4}{4 \cdot 50^2} - \left(\frac{100}{3}\right)^2 = \frac{50^2}{2} - \left(\frac{100}{3}\right)^2 \approx 139;$$

$$\sigma(R) \approx 11{,}8.$$

Интересно, что если бы распределение R на отрезке [0; 50] было равномерным, то дисперсия была бы больше:

$$D(R) = \int_0^{50} x^2 \cdot \frac{1}{50} dx - 25^2 = \left.\frac{x^3}{3 \cdot 50}\right|_0^{50} - 25^2 = \frac{50^2}{3} - 25^2 \approx 208;$$

$$\sigma(R) \approx 14{,}4.$$

Вопросы и задачи

К разделу 1

1. Что такое случайная величина? Если рассматривать случайную величину как функцию, что будет ее областью определения и что — множеством значений?

2. Составьте таблицы значений случайных величин P и M из примера «Два кубика».

3. На координатной прямой в начале отсчета находится фишка. После каждого бросания монеты она сдвигается на единицу вправо, если выпал «орел», или на единицу влево, если выпала «решка». Случайная величина X — координата фишки после пяти бросаний. Сколько возможных значений имеет случайная величина X? Какие это значения?

4. Приведите примеры случайных величин, имеющих конечное, счетное, несчетное множество возможных значений.

К разделу 2

5. Что такое закон распределения случайной величины? Как он задается для дискретных величин? Для непрерывных?

6. Найдите законы распределения случайных величин P и M из примера «Два кубика».

7. Найдите закон распределения случайной величины P из примера «Стрельба по мишени». Считайте равновозможным попадание пули в любую точку мишени.

8. Найдите закон распределения случайной величины X из задачи 4.

9. Найдите плотность вероятности случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[a; b]$. Нарисуйте график плотности.

10. Пусть случайная величина T — время, которое вы тратите на дорогу от дома до работы. Нарисуйте, как примерно выглядит плотность вероятности этой величины.

К разделу 3

11. Что такое математическое ожидание случайной величины? Как вычислить математическое ожидание дискретной величины? Непрерывной величины?

12. Какие вы знаете свойства математического ожидания?

13. Найдите математическое ожидание случайных величин P и M из примера «Два кубика».

14. Что такое дисперсия случайной величины? Как вычислить дисперсию дискретной величины? Непрерывной величины?

15. Какие вы знаете свойства дисперсии?

16. Найдите дисперсию и стандартное отклонение случайных величин P и M из примера «Два кубика».

17. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X из задачи 4.

18. Найдите математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины, равномерно распределенной на отрезке $[a; b]$.

Методические замечания

Как уже сказано в начале этой лекции, ее материал напрямую не связан с необходимым минимумом содержания, заложенным в стандарте. Тем не менее на понятие случайной величины опирается практически весь статистический материал, к изучению которого мы приступим в следующей лекции, здесь же только приведем соответствующие цитаты из стандарта.

<u>Основная школа</u>. Статистические данные. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков. Средние результатов измерений. Понятие о статистическом выводе на основе выборки.

<u>Старшая школа</u>. Табличное и графическое представление данных. Числовые характеристики рядов данных.

<u>К разделу 1</u>

Случайные величины играют в теории вероятностей и ее приложениях не менее важную роль, чем случайные события. Напомним, что понятие случайного события мы формировали постепенно:

– событие, которое при одних и тех же условиях может как произойти, так и не произойти;

– любое событие, связанное со случайным экспериментом;

– любое подмножество в Ω — множестве всех элементарных исходов опыта.

Совершенно аналогичные стадии можно выделить при формировании понятия случайной величины:

– величина, значения которой зависят от случая;

– любая величина, связанная со случайным экспериментом;

– любая числовая функция[1], определенная на элементарных исходах опыта, т.е. на элементах $\omega \in \Omega$.

---

[1] На самом деле все обстоит несколько сложнее – в математике от этой функции требуется еще *измеримость*. Но обсуждать здесь это понятие мы не будем.

Важно осознать, что для каждого исхода опыта случайная величина имеет вполне конкретное (неслучайное) значение. Но поскольку исход опыта заранее непредсказуем, то непредсказуемо и значение случайной величины. Таким образом, чтобы полностью определить случайную величину, нужно задать ее значения на каждом из элементарных исходов опыта. Для этого существует несколько возможностей, которые мы иллюстрируем в приведенных примерах: таблица, формула, словесное описание.

Поскольку понятия случайной величины нет в стандарте, то говорить о пользе его изучения мы можем только в сослагательном наклонении. Знакомство с понятием случайной величины было бы полезно не только в практическом отношении (после него легче изучать статистический материал), но и для формирования математической культуры школьника в целом. Оно расширяет и углубляет представление учащихся о функции, позволяет рассмотреть большое количество содержательных примеров, в которых рассматриваются функции, заданные на множествах самой разной природы. Если знакомство со случайными событиями развивает и углубляет понятие о множестве, то случайные величины делают то же самое с понятием функции.

К разделу 2

Чаще всего функция действительного аргумента задается формулой. Именно такой способ наиболее излюблен в школьной математике. Иногда (к сожалению, редко) функцию задают графически. Но для случайных величин эти способы, как правило, не годятся, т.к. их область определения может быть не числовой. Именно поэтому на первый план выходит проблема описания такой функции.

Удобным способом представления информации о случайной величине X является закон ее распределения. Он показывает, какие значения и с какими вероятностями может принимать эта величина. Отметим, что часть информации о функции X при таком представлении теряется: в законе не указывается не только чему равно $X(\omega)$для каждого $\omega \in \Omega$, но и само множество Ω. Тем не менее этой информации оказывается вполне достаточно для решения очень многих практических задач, связанных с исследованием случайных величин.

В теории вероятностей есть универсальные способы представления законов распределения — например, функция распределения. Однако для всех этих способов требуется вводить новое определение интеграла — интеграла по Лебегу. Поэтому при элементарном изложении приходится рассматривать только наиболее важные частные разновидности случайных величин: дискретные и непрерывные[2].

Дискретные величины принимают конечное или счетное множество значений, поэтому для них закон распределения можно представить, перечислив все возможные значения и соответствующие им вероятности. Это делают с помощью таблицы или общей формулы, выражающей вероятность каждого значения.

Непрерывные величины принимают значения из некоторого промежутка, которые уже нельзя перечислить. Для них закон распределения задается плотностью вероятности — специальной функцией, интеграл от которой по любому множеству дает вероятность попадания случайной величины в это множество.

Целью раздела является не только дать общее понятие о законе распределения и способах его задания, но и научиться находить законы распределения конкретных величин в простейших случайных опытах.

<u>К разделу 3</u>

Числовые характеристики случайных величин содержат в «концентрированном» виде наиболее важную информацию об их поведении. При этом все они вычисляются на основе закона распределения, т.е. являются характеристиками скорее не случайной величины, а ее закона распределения.

Как уже говорилось выше, при элементарном изложении невозможно ввести общее понятие закона распределения, поэтому и все числовые характеристики приходится определять отдельно для дискретных и отдельно для непрерывных величин.

Наиболее важная из характеристик — математическое ожидание — содержит информацию о поведении величины в среднем. Математическое ожидание можно рассматривать как средневзвешенное значение случайной величины, где весом каждого значения является его вероятность. Статистическим аналогом математического ожидания будет выборочное среднее, т.е. среднее арифметическое всех значений, полученных в выборке. Об этом пойдет речь в последующих лекциях. Там же мы познакомимся с одним из фундаментальных законов всей теории вероятностей — *законом больших чисел*, в котором обнаруживается связь

[2] Этими видами не исчерпываются все разновидности случайных величин, но именно они чаще всего встречаются в практических применениях.

между выборочным средним и математическим ожиданием случайной величины. Большинство других числовых характеристик (в том числе и дисперсия) определяются через математическое ожидание.

В заключение отметим, что отсутствие в стандартах самого понятия случайной величины, при всем понимании объективных причин и невозможности объять необъятное, представляется странным. Без него остается ущербным как изучение фундаментальных вероятностных законов, так и получение практических навыков в обработке статистических данных. Надеемся, что изучение материала этой лекции будет не напрасным и принесет свои плоды в будущем.

Литература

Учебники и учебные пособия для общеобразовательной школы

1. Математика. Учебники для 5—6 классов общеобразовательных учреждений / Под ред. Г.В. Дорофеева и И.Ф. Шарыгина. — М.: Просвещение, 2004.
2. Математика: Алгебра. Функции. Анализ данных. Учебники для 7—9 классов общеобразовательных учреждений / Под ред. Г.В. Дорофеева. — М.: Просвещение, 2004.
3. Бунимович Е.А., Булычев В.А. Вероятность и статистика. Учебное пособие для 5—9 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Дрофа, 2002.
4. Бунимович Е.А., Булычев В.А. Основы статистики и вероятность. Учебное пособие для 5—9 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Дрофа, 2004.
5. Бунимович Е.А., Булычев В.А. Вероятность и статистика 5—9. Электронное учебное пособие на CD-ROM. — М.: Дрофа, 2003 год.
6. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Алгебра: элементы статистики и теории вероятностей. Учебное пособие для 7—9 классов общеобразовательных учреждений / Под ред С.А. Теляковского. — М.: Просвещение, 2003.
7. Мордкович А.Г., Семенов П.В. События. Вероятности. Статистическая обработка данных. Дополнительные параграфы к курсу алгебры 7—9 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Мнемозина, 2003.
8. Ткачева М.В., Федорова Н.Е. Элементы статистики и вероятность. Учебное пособие для 7—9 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Просвещение, 2004.
9. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А., Высоцкий И.Р., Ященко И.В. Теория вероятностей и статистика. — М.: МЦНМО, 2004.

Дополнительная литература для школьников

10. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1964.
11. Лютикас В.С. Факультативный курс по математике. Теория вероятностей. — М.: Просвещение, 1990.
12. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями. — М.: Наука, 1975.
13. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. — М.: Мир, 1969.

14. Кордемский Б.А. Математика изучает случайности. — М.: Просвещение, 1975.

15. Плоцки А. Вероятность в задачах для школьников. — М.: Просвещение, 1996.

Книги и статьи методической и методологической направленности

16. Борель Э. Вероятность и достоверность. — М.: Наука, 1969.

17. Булычев В.А. Вероятность вокруг нас и в школьном учебнике математики // Газета «Математика», № 48, 1997.

18. Булычев В.А., Бунимович Е.А. Изучение вероятностно-статистического материала в школьном курсе математики. Программа для курсов повышения квалификации учителей // Математика в школе, № 4, 2003, с. 59—63.

19. Бунимович Е.А. Вероятностно-статистическая линия в базовом школьном курсе математики // Математика в школе, № 4, 2002, с. 52—58.

20. Бунимович Е.А. Методическая система изучения вероятностно-статистического материала в основной школе. Автореферат и диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. — Москва, 2004 г.

21. Глеман М., Варга Т. Вероятность в играх и развлечениях. — М.: Просвещение, 1979.

22. Даймենд С. Мир вероятностей. — М.: Статистика, 1970.

23. Майстров Д.Е. Теория вероятностей (исторический очерк). — М.: Наука, 1967.

24. Реньи А. Трилогия о математике. — М.: Мир, 1980.

25. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. — М.: Мир, 1990.

26. Решение задач по статистике, комбинаторике и теории вероятностей. 7—9 классы // Автор-составитель В.Н. Студенецкая. — Волгоград: Учитель, 2005.

Вузовские учебники, доступные для самостоятельного изучения

27. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1969.

28. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Основы теории вероятностей. — М.: Просвещение, 1967.

29. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974.

30. Розанов Ю.А. Лекции по теории вероятностей. — М.: Наука, 1986.

31. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. Краткий курс и научно-методические замечания. — М.: Изд-во МГУ, 1972.

32. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. — М.: Мир, 1984.

33. Ширяев А.Н. Вероятность. — М.: Наука, 1980.

Учебники [1], [2] — первый и, по-видимому, наиболее продуманный опыт введения вероятностно-статистической линии в курсе математики основной школы. Новый для школьной математики материал органично вписан в общую авторскую концепцию. Учебные пособия [3], [4] продолжают методическую линию [1], [2], расширяя круг рассматриваемых вопросов и дополняя их необходимыми теоретическими сведениями. Содержат большое количество задач разного уровня сложности. Учебные пособия [5]—[7] изданы как дополнения к известным учебникам алгебры: [5] — под редакцией С.А. Теляковского, [6] — А.Г. Мордковича, [7] — Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, Ю.В. Сидорова, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунина.

Из дополнительной литературы можно порекомендовать классическую книгу [10], выдержавшую рекордное количество отечественных и зарубежных изданий, известный факультативный курс [11], замечательный сборник задач [12], а также учебник для американских школьников [13].

Научные основы рекомендуемого нами подхода к преподаванию вероятностно-статистической линии в основной школе систематически изложены в [20]. Совершенно уникальной по содержанию является книга [21], в которой авторы делятся собственным опытом преподавания элементов вероятности и статистики в начальной школе. В книге [26] вы найдете решение всех задач из учебных пособий [5]—[7].

Из вузовских пособий отметим [29] — единственный учебник, снабженный пространными научно-методическими комментариями, а также классическую книгу [32], содержащую огромное количество интересных задач.

Ответы и решения

Лекция 1

4. Пронумеруем бумажки: 1, 2, 3. Пусть с крестиком будет бумажка № 3. Возможные исходы опыта: {123, 132, 213, 231, 312, 321} — всего 6 исходов.

5. A = {312, 321}; B = {132, 231}; C = {123, 213}.

8. Нет, нельзя.

9. 0, 08.

10. Конечно, нельзя. В каждом тираже участвовало огромное количество карточек.

11. В ситуациях а), в), г), е).

12. Нет, не прав. Значения суммы не равновозможны.

13. а) $\dfrac{4}{365\cdot 3+366}=\dfrac{4}{1461}$; б) $\dfrac{4}{1461}$; в) $\dfrac{1}{1461}$.

14. Каждый в своей — $\dfrac{1}{6}$, каждый в чужой — $\dfrac{1}{3}$. Возможные исходы — см. задачу 4.

15. $\dfrac{1}{7}$.

16. а) $\dfrac{25\pi}{100}=\dfrac{\pi}{4}$; б) 0; в) $\dfrac{3\pi}{4}$.

17. 4 линейки — с вероятностью $\dfrac{1}{8}$, 3 линейки — с вероятностью $\dfrac{7}{8}$.

18. $\dfrac{120}{360}=\dfrac{1}{3}$.

19. а) 0; б) $\dfrac{10^2}{20^2}=\dfrac{1}{4}$.

20. Около 3 см. Если обозначить неизвестный радиус мяча через R, то получим следующее приближенное равенство: $\dfrac{(20-2R)^2}{20^2}\approx\dfrac{1}{2}$, из которого и можно оценить R.

21. $\dfrac{1}{4}$.

Лекция 2

1. По правилу умножения $12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12 = 1728000$.

2. Первым — А000АА, последним — Х999ХХ. За номером У899ХХ следует У900АА, предшествует ему У899ХУ.

3. По правилу умножения $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 72$ способами.

4. Если обозначить число игроков в одной команде x, а в другой y, то по правилу умножения будет совершено $x \cdot y$ рукопожатий, поэтому $x \cdot y = 323$. Разложим 323 на простые множители: $323 = 17 \cdot 19$. Всего игроков было $17 + 19 = 36$.

5. а) Если поставить на шахматную поле ладью, то в какой бы клетке она ни стояла, будет ровно 14 клеток, куда она может пойти. Поэтому по правилу умножения — $64 \cdot 14 = 910$. б) Если поставить на доску слона, то число клеток, куда он может пойти, зависит от того, в какую часть доски мы его поставили. Поэтому приходится применять правило сложения: $28 \cdot 7 + 20 \cdot 9 + 12 \cdot 11 + 4 \cdot 13 = 560$.

6. 5! = 120 — это перестановки.

7. $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$ — это размещения из 16 по 3.

9. 24 нуля.

10. а) $4! = 24$; б) $\dfrac{4!}{2} = 12$; в) $\dfrac{4!}{2 \cdot 2} = 6$.

11. $C_{25}^{2} = \dfrac{25!}{2! \cdot 23!} = 300$ — это сочетания из 25 по 2.

12. $C_{36}^{5} = \dfrac{36!}{5! \cdot 31!} = 376992$ — это сочетания из 36 по 5.

14. За 2 минуты.

15. По правилу умножения $C_{20}^{8} \cdot C_{12}^{7} \cdot C_{5}^{5} = 125970 \cdot 792 \cdot 1 = 99768240$ способами.

16. Наташа — $\dfrac{24}{C_{25}^{2}} = \dfrac{2}{25} = 0{,}08$, Наташа и Света — $\dfrac{1}{C_{25}^{2}} = \dfrac{1}{300} = 0{,}0033$.

17. а) $\dfrac{6}{6^3} = \dfrac{1}{36}$; б) $\dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \dfrac{5}{9}$; в) $1 - \dfrac{1}{36} - \dfrac{5}{9} = \dfrac{5}{12}$.

18. $\frac{C_{32}^{16} \cdot C_4^2}{C_{36}^{18}} = \frac{32!}{16! \cdot 16!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{18! \cdot 18!}{36!} = \frac{153}{385} = 0,397$. Переформулируем задачу: вы берете себе 18 карт из 36; какова вероятность, что среди них окажется ровно 2 туза? Всего исходов — C_{36}^{18}. Для благоприятного исхода мы должны выбрать 2 карты из 4 тузов, а затем 16 карт из 32 нетузов — по правилу умножения это можно сделать $C_{32}^{16} \cdot C_4^2$ способами.

19. В задаче 15 мы уже считали общее количество равновозможных исходов у этого опыта. Посчитаем благоприятные по правилу сложения и умножения: $C_{18}^6 \cdot C_{12}^7 + C_{18}^5 \cdot C_{13}^8 + C_{18}^3 \cdot C_{15}^8$. Отсюда находим вероятность:

$$\frac{C_{18}^6 \cdot C_{12}^7 + C_{18}^5 \cdot C_{13}^8 + C_{18}^3 \cdot C_{15}^8}{C_{20}^8 \cdot C_{12}^7} = \frac{59}{190} = 0,31.$$

20. $\frac{1}{2}$ при любом количестве испытаний. Эту задачу можно решить интересным методом, довольно часто используемым в математике. При n-кратном бросании монеты имеется 2^n возможных исходов. Все они делятся на благоприятные (где количество «орлов» нечетно) и неблагоприятные (количество «орлов» четно). Докажем, что их поровну. Заменим в каждом из исходов результат первого бросания на противоположный (например, исход ОРРО... превратится в РРРО...). Докажите, что это отображение, во-первых, взаимно-однозначно, а во-вторых, переводит любой благоприятный исход в неблагоприятный и наоборот.

21. а) последовательный выбор 10 шаров из 2 с возвращением (два шара — «орел» и «решка») ; б) последовательный выбор 5 шаров из 6 с возвращением (шесть шаров — шесть граней кубика); в) последовательный выбор 18 шаров из 36 без возвращения.

22. Обозначим неизвестное количество шаров через k. Тогда $\frac{k \cdot (k-1)}{10 \cdot 9} = \frac{2}{15}$, откуда $k = 4$.

23. а) $\frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{4}$; б) $\frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{1}{5}$; в) $\frac{C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

24. Способ 1-й (длинный): нужно распределить 30 конфет на трех человек. По правилу умножения это можно сделать $C_{30}^{10} \cdot C_{20}^{10} \cdot C_{10}^{10} = 30045015 \cdot 184756 \cdot 1 = 5\,550\,996\,791\,340$ способами.

Это и есть общее число равновозможных исходов опыта. Число благоприятных исходов, при каждом из которых всем друзьям достается ровно по одному сюрпризу, будет

$$C_3^1 \cdot C_{27}^9 \cdot C_2^1 \cdot C_{18}^9 \cdot C_1^1 \cdot C_9^9 = 3 \cdot 4686825 \cdot 2 \cdot 48620 \cdot 1 \cdot 1 =$$
$$= 1367240589000.$$

Отсюда, искомая вероятность — $\frac{1367240589000}{5550996791340} = 0{,}246$.

Способ 2-й (более короткий): будем считать, что 30 конфет раскладываются на 30 мест, из которых первые 10 достаются первому человеку, вторые 10 — второму, третьи 10 — третьему. Начнем с того, что разложим по этим местам конфеты с сюрпризом (потом положим и остальные — но от этого уже ничего не будет зависеть). Выбрать из 30 свободных мест 3 можно C_{30}^3 способами. Благоприятными будут исходы, в которых в каждом из трех десятков выбрано по одному месту. По правилу умножения их будет $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$. Искомая вероятность — $\frac{1000}{C_{30}^3} = \frac{50}{203} = 0{,}246$.

Лекция 3

2. Противоположными событиями будут B и C.

$$P(B) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{2}{5}. \quad P(C) = 1 - P(B) = \frac{3}{5}.$$

3. Опыт имеет $2^6 = 64$ равновозможных исхода. Событие A содержит 2 исхода, значит, $\bar{A}$ — 62 исхода. Отсюда $P(\bar{A}) = \frac{62}{64} = \frac{31}{32}$.

4. Пусть A = {в N бросаниях кубика выпала хотя бы одна шестерка}. Тогда $\bar{A}$ = {в N бросаниях кубика не выпало ни одной шестерки}. $P(\bar{A}) = \frac{5^N}{6^N} = \left(\frac{5}{6}\right)^N$. $P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N > \frac{1}{2}$. Отсюда $N = 4$.

6. $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6\}$; $B \cup C = \{1, 2, 4, 6\}$; $A \cap B = \{2\}$; $A \cap C = \varnothing$; $B \cap C = \{6\}$.

8. а) $(A \cap C) \cup B$ — 5 исходов; б) $A \cap (C \bigcup B)$ — 1 исход;

в) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$ — 6 исходов; г) $A \cup B \cup C \cup D$ — 29 исходов.

10. A и B, A и C.

11. Для 5 монет: $P = \frac{5}{2^5} + \frac{10}{2^5} + \frac{1}{2^5} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

Для 6 монет: $P = \frac{6}{2^6} + \frac{20}{2^6} + \frac{6}{2^6} = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$.

Решение в общем случае — см. задачу 20 к лекции 2.

12. От 0, 6 до 1.

14. Могут, если хотя бы одно из них имеет нулевую вероятность.

16. N = 10, 11 — зависимы; N = 12 — независимы.

17. $P = 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}52$.

18. $\frac{1}{28}$.

19. Задача напоминает задачу 4. Пусть A = {среди N билетов будет хотя бы один счастливый}. Тогда $\overline{A}$ = {среди N билетов все без выигрыша}. $P(\overline{A}) = \left(\frac{80}{100}\right)^N = \left(\frac{4}{5}\right)^N$. $P(A) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^N > \frac{1}{2}$. Отсюда N = 4.

Лекция 4

2. Случайная величина M:

1-й кубик \ 2-й кубик	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

3. 6 значений: –5, –3, –1, 1, 3, 5.

6. Закон распределения M :

Значение	1	2	3	4	5	6
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

7. По определению геометрической вероятности, чтобы найти вероятность каждого значения, нужно поделить площадь соответствующего кольца на площадь всего круга:

$$P(S=0)=\frac{\pi\cdot 5^2-\pi\cdot 0^2}{\pi\cdot 50^2}=\frac{1}{100}\;;\;\; P(S=1)=\frac{\pi\cdot 10^2-\pi\cdot 5^2}{\pi\cdot 50^2}=\frac{3}{100}\;\;;\;\ldots\;;$$

$$P(S=10)=\frac{\pi\cdot 50^2-\pi\cdot 45^2}{\pi\cdot 50^2}=\frac{19}{100}$$

Закон распределения случайной величины P :

Значение	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Вероятность	$\frac{1}{100}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{7}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{13}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{19}{100}$

8. Закон распределения случайной величины X :

Значение	–5	–3	–1	1	3	5
Вероятность	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

9. $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a};x\in[a,b]\\ 0;x\notin[a,b]\end{cases}.$

13. $E(M)=\dfrac{161}{36}=4,47$.

16. $D(M) = E(M^2) - (E(M))^2 = \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2 = 1{,}97$; $\sigma(M) = 1{,}4$.

17. $E(X) = 0$ — это следует из симметрии распределения. $D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 5 - 0 = 5$.

18. $E = \frac{a+b}{2}$; $D = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Содержание