УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

1. Разложение на множители

а) $(x-1)(y+3)=19$.

б) $x(23y-98)=0$.

в) $x+y=xy$.

г) $3x^2+4xy-7y^2=13$.

д) $19x-yz=1995$, решить в простых числах

2. Делимость чисел

а) $y^2=5x^2+6$.

б) $x^2+1=3y$.

в) $2x^2-2xy+9x+y=2$.

г) $x^2+9y^2=3z+2$.

д) $x^2+5y^2=20z+2$.

3. Использование чётности-нечётности

а) Решить уравнение $2^x-15=y^2$ в натуральных числах.

б) $y^2+1=2^x$

в) $2x^2-5y^2=7$

г) Найти 3 целых решения $x^2-51y^2=1$.

д) При укладывании тетрадей по 6 и по 7 тетрадей одна всё время оставалась. А при укладывании тетрадей по 13 не оставалось ни одной лишней тетради. Каково наименьшее число тетрадей.

4. Преобразования уравнения в сумму квадратов. Перебор

а) $x^2+(y-1)^2=1$

б) $x+y=x^2-xy+y^2$

5. Уравнения с радикалами.

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2000}$.

6. Графические подходы.

а) $\begin{cases} y\ge x^2; \\ y\le x+1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} |y-x|\ge x; \\ |x-y|\le y; \\ y\le 2x. \end{cases}$

УРАВНЕНИЯ В ЦЕЛЫХ ЧИСЛАХ

§ 1. Разложение на множители

1. $(x-1)(y+3)=19$

Так как 19 — простое число, то оно может быть записано как произведение двух целых чисел в четырех различных вариантах: $19=19\cdot 1$; $19=1\cdot 19$; $19=(-19)\cdot(-1)$; $19=(-1)\cdot(-19)$, таким образом,

$$(x-1)(y+3)=19 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1=19 \\ y+3=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=1 \\ y+3=19 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=-19 \\ y+3=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=-1 \\ y+3=-19 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=20 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=16 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-18 \\ y=-4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=-22 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(20; –2); (2; 16); (–18; –4); (0; –22)\}$.

Упражнения:
1.1.1. $(x-1)(y+15)=3$ **1.1.2.** $(2x+3)(y-1)=7$ **1.1.3.** $(1-x)(22+y)=971$
1.1.4. $x(23y-98)=0$ **1.1.5.** $(x+2000)(y-2000)=2$.
Ответы: 1. $\{(4;-14);\ (2;-12);\ (0;-18);\ (-2;-16)\}$; 2. $\{(2;2);\ (-1;8);\ (-5;0);\ (-2;-6)\}$;
3. $\{(972;-21);\ (0;949);\ (2;-993);\ (972;-23)\}$; 4. $\{(0;z): z\in \mathbf{Z}\}$; 5. $\{(-1998;2001);\ (-1999;2002);$ $(-2001;1998);\ (-2002;1999)\}$.

Прежде чем решить некоторые примеры подобным способом, их надо разложить на множители. Например,

$$x+y=xy\,.$$

Первым действием перенесем все слагаемые в одну часть: $xy-x-y=0$, далее, чтобы разложить пример на множители обычно к каждой из частей добавляют удобное целое число. В нашем примере постараемся получить произведение $(x-1)(y-1)$, добавив к каждой из частей уравнения 1, то есть $xy-x-y+1=1$. Разложив на множители, получим $(x-1)(y-1)=1$, откуда $x=0$, $y=0$ или $x=2$, $y=2$.

Немного более сложной является задача

$$3x^2+4xy-7y^2=13\,.$$

Разложением на множители получим $(x-y)(3x+7y)=13$, замечу, что в данном случае мы ничего не прибавляли к обеим частям уравнения. Так как число 13 – это $13\cdot 1$, $1\cdot 13$, $-13\cdot(-1)$, $-1\cdot(-13)$, то мы получаем совокупность четырех систем:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x-y=1\\3x+7y=13\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}x-y=13\\3x+7y=1\end{cases} & (2)\\ \begin{cases}x-y=13\\3x+7y=1\end{cases} & (3)\\ \begin{cases}x-y=-1\\3x+7y=-13\end{cases} & (4)\end{array}\right.$$

Решая системы выражением одной переменной через другую, получаем, что системы (2) и (3) решений в целых числах не имеют, а ответами систем (1) и (4) являются соответственно $x=2$, $y=1$ и $x=-2$, $y=-1$.

Решая подобные задачи важно знать, сколько делителей имеет число.

Теорема: если произвольное число $a=p^m q^n$, где p и q — простые числа, а $m, n\in \mathbf{N}$, то число натуральных делителей этого числа a равняется $(m+1)(n+1)$.

Доказательство: запишем по горизонтали все натуральные делители числа p^m, по вертикали — все делители натурального числа q^n:

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & \overbrace{p \quad\quad p^2 \quad\quad \cdots \quad\quad p^m}^{m\text{ раз}} \\ & q & \\ & & pq \quad\quad p^2q \quad\quad \cdots \quad\quad p^mq \\ n\text{ раз}\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. & q^2 & pq^2 \quad\quad p^2q^2 \quad\quad \cdots \quad\quad p^mq^2 \\ & \vdots & \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad\quad \ddots \quad\quad\quad \vdots \\ & & pq^n \quad\quad p^2q^n \quad\quad \cdots \quad\quad p^mq^n \\ & q^n & \end{array}$$

Мы получили прямоугольник, найдем недостающие делители. Таким образом, общее число натуральных делителей есть площадь прямоугольника со сторонами $(n+1)$ и $(m+1)$, то есть $(n+1)(m+1)$.

Иногда предлагается решать уравнения только в простых числах. Например: решить уравнение $19x-yz=1995$, причем x, y, z — простые числа.

Решение: так как число 1995 делится нацело на 19, то разложим данное уравнение на множители следующим образом: $19x-yz=1995 \Leftrightarrow yz=19x-1995 \Leftrightarrow yz=19(x-105)$. Далее, решая в простых числах, получим совокупность двух систем, из которой несложно определить ответы:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=19\\z=x-105\end{cases}\\ \begin{cases}y=x-105\\z=19\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=107\\y=19\\z=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=107\\y=2\\z=19\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\{(107;19;2);(107;2;19)\}$.

§ 2

Отдельную группу уравнений, решаемых в целых числах, представляют собой уравнения, решения которых в той или иной степени связаны с делимостью. Для начала повторим признаки делимости, которые нам известны:

На 2 делится нацело число, если его последняя цифра четная.

На 4 делится нацело число, если его последние две цифры образуют число, делящееся на 4.

На 3 делятся нацело те числа, у которых сумма цифр делиться на 3; на 9 — те у которых сумма цифр делится на 9.

На 5 делятся нацело числа, последняя цифра которых 0 или 5.

На 6 делятся нацело числа, которые одновременно делятся на 2 и на 3.

На 8 делится нацело число, если три последние цифры его образуют число, делящееся на 8.

Решим уравнение: $y^2 = 5x^2 + 6$.

Решение: предположим, что $x \vdots 3$, тогда $5x^2 + 6 \vdots 3$, но $5x^2 + 6$ не является полным квадратом, так как $5x^2 + 6$ не делится нацело на 9; таким образом, если $x \vdots 3$, то решений нет. Предположим, что x не делится нацело на 3, тогда x^2 при делении на 3 дает в остатке один, в то время как $5x^2 + 6$ при делении на 3 дает в остатке 2, таким образом, остаток правой части не равен остатку левой от деления на одно и то же число, то есть правая часть не равна левой, решений нет.
Ответ: $\varnothing$.

С помощью аналогичной техники решается задача: $x^2 + 1 = 3y$. Решение: если $x \vdots 3$, то при делении левой части уравнения будет остаток 1, то есть решений в целых числах не будет, а если x не кратен 3, то при делении на 3 остаток в левой части будет равен 2, т. е. опять нет решений в целых числах.
Ответ: $\varnothing$.

§3

Многие целочисленные уравнения решают, выражая одну переменную через другую.

Решим уравнение:

$$2x^2 - 2xy + 9x + y = 2 .$$

Выразив y через x, получим, что $y = \frac{2x^2 + 9x - 2}{2x - 1}$. Далее попробуем сделать так, чтобы в числителе осталось целое число:

$$y = \frac{2x^2 - x + 10x - 5 + 3}{2x - 1} \Leftrightarrow y = x + 5 + \frac{3}{2x - 1} .$$

Так как $y \in \mathbb{Z}$, то $\frac{3}{2x-1} \in \mathbb{Z}$, таким образом,

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x-1=1 \\ 2x-1=3 \\ 2x-1=-1 \\ 2x-1=-3 \end{array}\right. \\ y = x+5+\frac{3}{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(1;9);(2;8);(0;2);(-1;3)\}$.

3.1.1. Проделайте данную операцию самостоятельно.
Решим следующее уравнение:

$$x^2+5y^2=20z+2 \quad .$$

$$x^2+5y^2=20z+2 \Leftrightarrow 5y^2=20z+2-x^2 \Leftrightarrow y^2=4z+\frac{2-x^2}{5},$$

то есть $y^2 \in \mathbb{Z}$ если $4z \in \mathbb{Z}$, что верно, и если $2-x^2 \vdots 5$, что не верно, так как x^2 не может заканчиваться на 2, и на 7. Решений нет.

Доказательство выделенного утверждения:

$x=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x^2=$	1	4	9	16	25	36	59	64	81	100	121,

Упражнения: найдите самостоятельно, на какие цифры не может заканчиваться $x^n : x \in \mathbb{Z}$, если:
3.2.3. $n=3$ **3.2.4.** $n=4$ **3.2.5.** $n=5$
Ответы: 3. Может заканчиваться на любые цифры; 4. Может заканчиваться лишь на 1, 5, 6, 0; 5. Может заканчиваться на те же цифры, что и x.

Решим задачу:

$$x^2+9y^2=3z+2 \Leftrightarrow 9y^2=3z+2-x^2 \Leftrightarrow y^2=\frac{3z+2-x^2}{9}$$

Пусть $2-x^2$ не делится нацело на 3, тогда $3z+(2-x^2)$ не кратно трем и, следовательно, не кратно 9. Тогда $2-x^2$ кратно 3, что не возможно, так как при делении на 3 квадрат дает в остатке только 0 или 1, а $2-x^2$ даст в остатке 2 или 1. Число 0 не является составляющей цикла, таким образом $\frac{2-x^2}{3} \notin Z$. Решений нет.

§4. Использование четности-нечетности

Решим уравнение $2^x-15=y^2$ в натуральных числах.
Рассмотрим два случая:
1) $x=2k+1 : k \in \mathbb{N}$ (нечетное число). Так как 2 в четной степени при делении на 3 дает остаток 1 то 2^{2k+1} при делении на 3 дает в остатке 2, 15 делится на 3. Следовательно, y^2 не делится на 3, но квадрат числа, не делящегося на 3, дает при делении на 3 в остатке 1. Таким образом, равенство невозможно.

2) $x = 2k : k \in \mathbb{N}$ (четное число), тогда

$$2^{2k} - 15 = y^2 \Leftrightarrow 2^{2k} - y^2 = 15 \Leftrightarrow (2^k - y)(2^k + y) = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^k - y = 1 \\ 2^k + y = 15 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^k - y = 3 \\ 2^k + y = 5 \end{cases} \end{array}\right. \begin{array}{c} \text{(в других} \\ \text{случаях} \\ \text{будут} \\ \text{нецелые или} \\ \text{ненатуральные} \\ \text{решения)} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^k = 8 \\ 2y = 14 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^k = 4 \\ 2y = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 3 \\ y = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} k = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \overset{x=2k}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 6 \\ y = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Ответ: $\{(6;\ 7);\ (4;\ 1)\}$.

Нередко, решая подобные уравнения, можно найти очевидные корни и доказать, что других нет. Например, в уравнении

$$y^2 + 1 = 2^x$$

любой решающий без особого труда укажет очевидные решения: (0; 0); (1; 1); (1; –1).

Далее рассматривается два случая: 1) x — нечетный, тогда $x \geq 2$ и $y^2 + 1 \not\vdots\ 2$ если y — четный; $y^2 + 1 \vdots\ 2$, если y — нечетный. Однако, если y — нечетный, то $y^2 + 1 \not\vdots\ 4$ т. к. $4k^2 + 4k + 2 \not\vdots\ 4$.

А $2^x \vdots\ 4$ при $\forall x \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, таким образом, решений нет.

Ответ: $\{(0;\ 0);\ (1;\ 1);\ (1;\ -1)\}$.

Четность переменных должна также учитываться при решении уравнений вида

$$2x^2 - 5y^2 = 7:$$

$\left.\begin{array}{l} 2x^2 - \text{ чётное при } \forall x \in \mathbb{N} \\ 7 - \text{ нечётное} \end{array}\right\} \Rightarrow 5y^2 - \text{ нечётное}$. Таким образом, y — нечетный ($y = 2k + 1 : k \in \mathbb{N}$), подставив $y = 2k + 1$, получим уравнение $2x^2 - 5(2k+1)^2 = 7 \Leftrightarrow x^2 - 10k^2 - 10k = 6$. Следовательно, x должен быть четным ($x = 2n : n \in \mathbb{N}$), подставив $x = 2n$, получим уравнение $4n^2 - 10k^2 - 10k = 6 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \underset{\text{чётное}}{2n^2} - \underset{\text{чётное}}{5k(k+1)} = \underset{\text{нечётное}}{3}$, таким образом, данное уравнение не имеет решений, то есть и исходное уравнение их тоже не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Задача: найти 3 целых решения и общий вид решений уравнения $x^2 - 51y^2 = 1$. Выразив y^2 через x^2 : $y^2 = \dfrac{x^2 - 1}{51}$, можно найти очевидные решения: $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 0 \end{cases}$ и общий вид решений данного уравнения: $\begin{cases} x^2 = 1 + 51t \\ y^2 = t \end{cases} \overset{x,\, y \in Z}{\Rightarrow} \begin{cases} x = \pm\sqrt{1 + 51t} \\ y = \pm\sqrt{t} : t \in Z \end{cases}$, то есть помимо решений (1; 0); (–1; 0), принимая t за полные квадраты (1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; …), можно найти решение (50; 7).

Ответ: $\{(1;\ 0);\ (-1;\ 0);\ (50;\ 7);\ (\pm\sqrt{1+51t};\ \pm\sqrt{t}) : \sqrt{1+51t},\ \sqrt{t} \in Z\}$.

§6. Метод преобразования уравнения в сумму квадратов. Оценки

Решим уравнение: $x^2+(y-1)^2=1$ в целых числах. Очевидно, что если сумма двух квадратов равна 1, то либо один из них равен нулю, другой — 1, либо наоборот. Таким образом,

$$x^2+(y-1)^2=1 \overset{x,\,y\in Z}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2=0\\(y-1)^2=1\end{cases}\\ \begin{cases}x^2=1\\(y-1)^2=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ \left[\begin{array}{l}y-1=1\\y-1=-1\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.\\ y-1=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: {(0; 2); (0; 0); (1; 1); (–1; 1)}.

Собственно само преобразование в сумму квадратов выглядит следующим образом:

$$x+y=x^2-xy+y^2 \Leftrightarrow x^2-x-xy-y+y^2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(x-y)^2=2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\end{array}\right.$$

$(x-1)^2$	0	0	2	0	1	1
$(y-1)^2$	0	2	0	1	1	0
$(x-y)^2$	2	0	0	1	0	1

Ответ: {(2; 2); (1; 2); (0; 0); (1; 0); (0; 1); (2; 1)}.

§7 Уравнения вида $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{z}$, $\sqrt{x}+\sqrt{y}=z$, где $z\in\mathbb{Z}$.

Решим уравнение: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2000}$.

Вынесем $20^2=400$ из-под радикала:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=20\sqrt{5} \Leftrightarrow x=(20\sqrt{5})^2-40\sqrt{5y}+y \Leftrightarrow \sqrt{5y}=\frac{2000+y-x}{40},$$

причем

$$\sqrt{5y}\in\mathbb{N} \text{ и } \frac{2000+y-x}{40}\in\mathbb{N}.$$

Таким образом, $y = 5k^2 : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Поскольку $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 20\sqrt{5}$, то $x = 5m^2 : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, причём $k + m = 20$, что равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 0 \\ m = 20 \end{cases} \\ \begin{cases} k = 1 \\ m = 19 \end{cases} \\ \quad \ldots \\ \begin{cases} k = 20 \\ m = 0 \end{cases} \end{array}\right. \text{ то есть } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2000 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 1805 \end{cases} \\ \quad \ldots \\ \begin{cases} x = 2000 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\{(5(20-k)^2); 5k^2 : k = 0, \ldots, 20\}$.

Уравнение $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 48$, вида $\sqrt{x} + \sqrt{y} = z : z \in \mathbb{Z}$, решается в целых числах следующим образом: $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 48 \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = 12\sqrt{16}$, таким образом, $a = 16k^2$ (см. предыдущую задачу), аналогично $b = 16m^2$, причем $k + m = 12$ и k, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, таким образом,

$$k + m = 12;\ k \ge 0;\ m \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 0 \\ m = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} k = 1 \\ m = 11 \end{cases} \\ \quad \ldots \\ \begin{cases} k = 12 \\ m = 0 \end{cases} \end{array}\right. \text{, то есть } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 2304 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 16 \\ y = 1936 \end{cases} \\ \quad \ldots \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 2304 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Ответ: {(0; 2304); (16; 1936); …; (2304; 0)}.

Упражнения:

7.1.1. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1960}$ **7.1.2.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1960$

7.1.3. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{32}$ **7.1.4.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1998}$ (Олимпиада матмеха).