С. Шестаков, М. Галицкий, Москва

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Задачи, связанные с обратными тригонометрическими функциями, часто вызывают у школьников старших классов значительные трудности. Связано это, прежде всего, с тем, что в действующих учебниках и учебных пособиях подобным задачам уделяется не слишком большое внимание, и если с задачами на вычисление значений обратных тригонометрических функций учащиеся еще как-то справляются, то уравнения и неравенства, содержащие эти функции, нередко ставят их в тупик. Последнее не удивительно, поскольку практически ни в одном учебнике (включая учебники для классов с углубленным изучением математики) не излагается методика решения даже простейших уравнений и неравенств такого рода. Предлагаемая вашему вниманию статья посвящена методам решения уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции. Надеемся, что она окажется полезной для учителей, работающих в старших классах — как общеобразовательных, так и математических.

Вначале напомним важнейшие свойства обратных тригонометрических функций.

1. Функция $y = \arcsin x$ определена и монотонно возрастает на отрезке $[-1; 1]$;

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x,\ \ x \in [-1; 1];$$
$$E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

2. Функция $y = \arccos x$ определена и монотонно убывает на отрезке $[-1; 1]$;

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,\ \ x \in [-1; 1];$$
$$E(\arccos) = [0; \pi].$$

3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена и монотонно возрастает на $\mathbb{R}$;

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,\ \ x \in \mathbb{R};$$
$$E(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

4. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ определена и монотонно убывает на $\mathbb{R}$;

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x,\ \ x \in \mathbb{R};$$
$$E(\operatorname{arcctg}) = (0; \pi).$$

5.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ \ x \in [-1; 1];$$
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2},\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Свойства монотонности и ограниченности являются ключевыми при решении многих уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции. Перейдем к рассмотрению методов решения этих уравнений и неравенств.

I. Уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются одноименными обратными тригонометрическими функциями

Решение уравнений и неравенств, левая и правая части которых представляют собой одноименные обратные тригонометрические функции различных аргументов, основывается, прежде всего, на таком свойстве этих функций, как монотонность. Напомним, что функции $y = \arcsin x$ и $y = \operatorname{arctg} x$ монотонно возрастают, а функции $y = \arccos x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ монотонно убывают на своих областях определения. Поэтому справедливы следующие равносильные переходы.

1.

а) $\arcsin f(x) = \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \le 1; \end{cases}$

б) $\arcsin f(x) \le \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -1, \\ g(x) \le 1. \end{cases}$

2.

а) $\arccos f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \le 1; \end{cases}$

б) $\arccos f(x) \le \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge g(x), \\ g(x) \ge -1, \\ f(x) \le 1. \end{cases}$

3.

а) $\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$;

б) $\operatorname{arctg} f(x) \le \operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) \le g(x)$

4.

а) $\operatorname{arcctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$;

б) $\operatorname{arcctg} f(x) \le \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x) \ge g(x)$.

Замечание 1. Какой из двух равносильных систем пользоваться при решении уравнений 1а) и 2а), зависит от того, какое неравенство проще: $|f(x)| \le 1$ (тогда используем первую систему), или $|g(x)| \le 1$ (в этом случае используем вторую систему).

Пример 1. Решить уравнение $\arcsin(3x^2 - 4x - 1) = \arcsin(x+1)$.

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x - 1 = x + 1, \\ |x+1| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 = 0, \\ |x+1| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -\frac{1}{3}, \end{array} \right. \\ |x+1| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Замечание 2. Решать неравенство, входящее в систему, вообще говоря, не обязательно. Достаточно проверить, удовлетворяют ли неравенству найденные корни уравнения, как это и было сделано при решении примера 1.

Пример 2. Решить неравенство $\operatorname{arcctg}(8x^2-6x-1) \le \operatorname{arcctg}(4x^2-x+8)$.

Решение. Неравенство равносильно следующему:

$$8x^2-6x-1 \ge 4x^2-x+8 \Leftrightarrow 4x^2-5x-9 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge \dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-1] \cup \left[\dfrac{9}{4};+\infty\right)$.

Пример 3. Решить неравенство $3\arcsin 2x < 1$.

Решение.

$$3\arcsin 2x < 1 \Leftrightarrow \arcsin 2x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \arcsin 2x < \arcsin\left(\sin\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \le 2x < \sin\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}.$$

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{3}\right)$.

Пример 4. Решить неравенство $\arccos(x^2-3) \le \arccos(x+3)$.

Решение.

$$\arccos(x^2-3) \le \arccos(x+3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3 \ge x+3, \\ x+3 \ge -1, \\ x^2-3 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-6 \ge 0, \\ x \ge -4, \\ x^2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2) \ge 0, \\ x \ge -4, \\ (x-2)(x+2) \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: $\{-2\}$.

Пример 5. Решить уравнение $\arccos(4x^2-3x-2)+\arccos(3x^2-8x-4)=\pi$.

Решение. Так как $\pi-\arccos t = \arccos(-t)$, то имеет место следующая цепочка равносильных преобразований:

$$\arccos(4x^2-3x-2)=\pi-\arccos(3x^2-8x-4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arccos(4x^2-3x-2)=\arccos(-3x^2+8x+4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-3x-2=-3x^2+8x+4, \\ |4x^2-3x-2| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2-11x-6=0, \\ |4x^2-3x-2| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-\dfrac{3}{7}, \end{array}\right. \\ |4x^2-3x-2| \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{7}.$$

Ответ: $\left\{-\dfrac{3}{7}\right\}$.

Аналогичные равносильные преобразования используются и при решении задач с параметрами.

Пример 7. Решить уравнение с параметром a: $\arcsin(ax^2-ax+1)+\arcsin x=0$.

Решение. Уравнение равносильно уравнению

$$\arcsin(ax^2-ax+1)=-\arcsin x \Leftrightarrow \arcsin(ax^2-ax+1)=\arcsin(-x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^2-ax+1=-x, \\ |-x|\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2-(a-1)x-1=0, \\ |x|\le 1. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $a=0$. В этом случае система примет вид: $\begin{cases} x-1=0, \\ |x|\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

2) $a\ne 0$. В этом случае уравнение системы является квадратным. Его корни: $x_1=1$ и $x_2=-\dfrac{1}{a}$.

Так как $|x|\le 1$, то $\left|-\dfrac{1}{a}\right|\le 1\Leftrightarrow |a|\ge 1$. Если $a=-1$, то $x_2=x_1=1$. Если $a\in(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$, то уравнение имеет два корня.

Ответ: при $a\in(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$: $x=1$ и $x=-\dfrac{1}{a}$; при $a=-1$ и $a=0$: $x=1$; при прочих a решений нет.

Пример 8. Решить неравенство с параметром a: $\arccos(3ax+1)\le\arccos(2x+3a-1)$.

Решение. Неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 3ax+1\ge 2x+3a-1, \\ 2x+3a-1\ge -1, \\ 3ax+1\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a-2)x\ge 3a-2, \\ x\ge -\dfrac{3}{2}a, \\ ax\le 0. \end{cases}$$

При $a>\dfrac{2}{3}$ первое неравенство системы равносильно неравенству $x\ge 1$, при $a<\dfrac{2}{3}$ — неравенству $x\le 1$, при $a=\dfrac{2}{3}$ решением первого неравенства является любое действительное число.

Ответ: при $|a|>\dfrac{2}{3}$: решений нет; при $a=-\dfrac{2}{3}$: $x=1$; при $a\in\left(-\dfrac{2}{3};0\right]$: $x\in\left[-\dfrac{3}{2}a;1\right]$, при $a\in\left(0;\dfrac{2}{3}\right]$: $x\in\left[-\dfrac{3}{2}a;0\right]$.

II. Уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями

При решении уравнений и неравенств, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями, пользуются известными тригонометрическими тождествами. Эта группа задач является чуть более сложной по сравнению с предыдущей. При решении многих уравнений такого рода бывает целесообразно не обсуждать вопрос о равносильности преобразований, а сразу переходить к уравнению-следствию и после его решения делать необходимую проверку. Рассуждения здесь могут быть примерно следующими. Пусть требуется решить уравнение $\arcsin f(x)=\arccos g(x)$. Предположим, что x_0 — решение этого уравнения. Обозначим $\arcsin f(x_0)=\arccos g(x_0)$ через a. Тогда $\sin a=f(x_0)$, $\cos a=g(x_0)$, откуда $f^2(x_0)+g^2(x_0)=1$. Итак, $\arcsin f(x)=\arccos g(x)\Rightarrow f^2(x)+g^2(x)=1$ (1).

Рассуждая аналогично, можно получить следующие переходы:

$$\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f(x)\cdot g(x) = 1 \text{ (2) (использована формула } \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1\text{);}$$

$$\arcsin f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{g^2(x)+1} \text{ (3) (использована формула } \sin^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}\text{);}$$

$$\operatorname{arctg} f(x) = \arccos g(x) \Rightarrow \frac{1}{f^2(x)+1} = g^2(x) \text{ (4) (использована формула } \cos^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}\text{);}$$

$$\arcsin f(x) = \operatorname{arctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1} \text{ (5) (использована формула } \sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}\text{);}$$

$$\arccos f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1} \text{ (6) (использована формула } \cos^2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}\text{).}$$

Замечание 3. Корнем каждого из уравнений (1) — (4) может быть только такое число x_0, для которого $f(x_0)\ge 0$ и $g(x_0)\ge 0$. В противном случае множество значений левой и правой частей уравнения не пересекаются.

Пример 9. Решить уравнение $\arccos\frac{7x+5}{13} = \arcsin\frac{4x+1}{13}$.

Решение.

$$\arccos\frac{7x+5}{13} = \arcsin\frac{4x+1}{13} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \left(\frac{7x+5}{13}\right)^2 + \left(\frac{4x+1}{13}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 65x^2 + 78x - 143 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -\dfrac{143}{65}. \end{array}\right.$$

Корень $x = -\frac{143}{65}$ является посторонним.

Ответ: $\{1\}$.

Пример 10. Решить уравнение $\arcsin\frac{\sqrt{3x+2}}{2} = \operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{2}{x+1}}$.

Решение.

$$\arcsin\frac{\sqrt{3x+2}}{2} = \operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{2}{x+1}} \overset{(4)}{\Rightarrow} \frac{3x+2}{4} = \frac{1}{1+\dfrac{2}{x+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3}, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Корень $x = -2$ является посторонним.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Пример 11. Решить уравнение $\operatorname{arctg}(2\sin x) = \operatorname{arcctg}(\cos x)$.

Решение.

$$\operatorname{arctg}(2\sin x) = \operatorname{arcctg}(\cos x) \overset{(2)}{\Rightarrow} 2\sin x\cos x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k_1,\ k_1 \in \mathbb{Z}, \\ x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k_2,\ k_2 \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Корни вида $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k_2,\ k_2 \in \mathbb{Z}$ являются посторонними.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + 2\pi k_1,\ k_1 \in \mathbb{Z}\right\}$.

При решении неравенств, левая и правая части которых представляют собой разноименные обратные тригонометрические функции, целесообразно использовать метод интервалов, а в некоторых случаях учитывать свойства монотонных функций.

Пример 12. Решить неравенство $\arcsin\frac{x+2}{5} \le \arccos\frac{3x+1}{5}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin\frac{x+2}{5} - \arccos\frac{3x+1}{5}$ и решим неравенство $f(x) \le 0$ методом интервалов.

1) Найдем $D(f)$. Для этого решим систему

$$\begin{cases} \dfrac{|x+2|}{5} \le 1, \\ \dfrac{|3x+1|}{5} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \le x \le 3, \\ -2 \le x \le \dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le \frac{4}{3}.$$

2) Найдем нули $f(x)$. Для этого решим уравнение

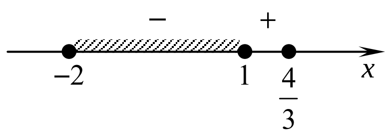
$$\arcsin\frac{x+2}{5} = \arccos\frac{3x+1}{5} \overset{(1)}{\Rightarrow} \left(\frac{x+2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3x+1}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Корень $x = -2$ является посторонним.

3) Решим неравенство $f(x) \le 0$ методом интервалов.

$$f(2) < 0,\quad f\left(\frac{4}{3}\right) > 0.$$



Ответ: $[-2; 1]$.

Замечание 4. Заметим, что найдя корень уравнения $\arcsin\frac{x+2}{5} = \arccos\frac{3x+1}{5}$ можно было не обращаться к методу интервалов, а воспользоваться тем, что функция $y = \arcsin\frac{x+2}{5}$ является монотонно возрастающей, а функция $y = \arccos\frac{3x+1}{5}$ монотонно убывающей на отрезке $\left[-2; \frac{4}{3}\right]$. Поэтому решением исходного неравенства является промежуток $[-2; 1]$. Следует, однако, понимать, что метод интервалов является более универсальным, — ведь его можно применять и в тех случаях, когда использование свойств монотонных функций не приводит к искомому результату.

При решении уравнений и неравенств данного типа, содержащих параметры, становится актуальным вопрос о равносильности преобразований. Чтобы преобразования (1) — (4) сделать равносильными, следует учесть естественные ограничения, связанные с областями определения обратных тригонометрических функций и множествами их значений (см. замечание 3). Так, например,

$$\arcsin f(x) = \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(x) + g^2(x) = 1, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0; \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} f(x) = \operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) = 1, \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) = 1, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Пример 13. Решить уравнение с параметром a: $\operatorname{arcctg}(x - 2a) = \operatorname{arctg}(2x - a)$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x-2a)(2x-a) = 1, \\ x - 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 5ax + 2a^2 - 1 = 0, \\ x > 2a. \end{cases}$$

Графиком квадратного трехчлена $f(x) = 2x^2 - 5ax + 2a^2 - 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Поскольку $f(2a) = -1 < 0$, то при любом a уравнение $f(x) = 0$ имеет ровно 2 корня, между которыми и заключено число $2a$. Поэтому только больший корень $f(x)$ удовлетворяет условию $x > 2a$. Это корень $x = \dfrac{5a + \sqrt{9a^2 + 8}}{4}$.

Ответ: при любом a $x = \dfrac{5a + \sqrt{9a^2 + 8}}{4}$.

III. Замена переменной

Некоторые уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции, можно свести к алгебраическим, сделав соответствующую замену переменной. При этом следует помнить о естественных ограничениях на вводимую переменную, связанных с ограниченностью обратных тригонометрических функций.

Пример 14. Решить уравнение $12\operatorname{arctg}^2 \dfrac{x}{2} = \pi\left(3x + 5\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\right)$.

Решение. Обозначим $\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$ через t, $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$. После преобразований получим уравнение

$$12t^2 - 5\pi t - 3\pi^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{3}{4}\pi, \\ t = -\dfrac{\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Поскольку $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$, то $t = -\dfrac{\pi}{3}$, откуда

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\sqrt{3} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}.$$

Ответ: $\{-2\sqrt{3}\}$.

Пример 15. Решить неравенство $\arccos^2 x - 3\arccos x + 2 \ge 2$.

Решение. Пусть $\arccos x = t$, $0 \le t \le \pi$. Тогда $t^2 - 3t + 2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 2, \\ t \le 1. \end{array}\right.$

Поскольку $0 \le t \le \pi$, то $\left[\begin{array}{l} 2 \le t \le \pi, \\ 0 \le t \le 1, \end{array}\right.$ откуда $\left[\begin{array}{l} 2 \le \arccos x \le \pi, \\ 0 \le \arccos x \le 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le x \le \cos 2, \\ \cos 1 \le x \le 1. \end{array}\right.$

Ответ: $[-1;\ \cos 2] \cup [\cos 1;\ 1]$.

Иногда свести уравнение или неравенство к алгебраическому можно с помощью тождества

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ (|x| \le 1).$$

Пример 16. Решить уравнение $\arcsin x \cdot \arccos x = \dfrac{\pi^2}{18}$.

Решение. Данное уравнение равносильно следующему:

$$\arcsin x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \frac{\pi^2}{18} \Leftrightarrow 18\arcsin^2 x - 9\pi \arcsin x + \pi^2 = 0.$$

Пусть $\arcsin x = t$, $|t| \le \dfrac{\pi}{2}$.

Тогда

$$18t^2 - 9\pi t + \pi^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{3}, \\ t = \dfrac{\pi}{6}. \end{array}\right.$$

Поэтому

$$\left[\begin{array}{l} \arcsin x = \dfrac{\pi}{3}, \\ \arcsin x = \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}, \\ x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.

IV. Использование свойств монотонности и ограниченности обратных тригонометрических функций

Решение некоторых уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции, основывается исключительно на таких свойствах этих функций, как монотонность и ограниченность. При этом используются следующие теоремы.

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$ монотонна, то уравнение $f(x) = c$ ($c = \text{const}$) имеет не более одного решения.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ монотонно возрастает, а функция $y = g(x)$ монотонно убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения.

Теорема 3. Если $\min\limits_{x} f(x) = c = \max\limits_{x} g(x)$ ($c = \text{const}$), то на множестве X уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = c, \\ g(x) = c. \end{cases}$

Пример 17. Решить уравнение $2\arcsin 2x = 3\arccos x$.

Решение. Функция $y = 2\arcsin 2x$ является монотонно возрастающей, а функция $y = 3\arccos x$ — монотонно убывающей. Число $x = \frac{1}{2}$ является, очевидно, корнем данного уравнения. В силу теоремы 2 этот корень — единственный.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Пример 18. Решить уравнение $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+x} + \arcsin\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Пусть $x^2 + x = t$. Тогда уравнение примет вид $\operatorname{arctg}\sqrt{t} + \arcsin\sqrt{t+1} = \frac{\pi}{2}$.

Функции $z = \sqrt{t}$, $z = \sqrt{t+1}$, $y = \operatorname{arctg} z$ являются монотонно возрастающими. Поэтому функция $y = \operatorname{arctg}\sqrt{t} + \arcsin\sqrt{t+1}$ также является монотонно возрастающей. В силу теоремы 1 уравнение $\operatorname{arctg}\sqrt{t} + \arcsin\sqrt{t+1} = \frac{\pi}{2}$ имеет не более одного корня. Очевидно, что $t = 0$ является корнем этого уравнения. Поэтому

$$x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1; 0\}$.

Пример 19. Решить неравенство $\arccos x + \arccos x\sqrt{2} + \arccos x\sqrt{3} \le \frac{3\pi}{4}$.

Решение. Левая часть неравенства представляет собой монотонно убывающую на отрезке $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ функцию $f(x) = \arccos x + \arccos x\sqrt{2} + \arccos x\sqrt{3}$. Уравнение $f(x) = \frac{3\pi}{4}$ в силу теоремы 1 имеет не более одного корня. Очевидно, что $x = \frac{1}{2}$ — корень этого уравнения, поэтому решением неравенства $f(x) = \frac{3\pi}{4}$ является отрезок $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Пример 20. Решить уравнение $\arcsin(x(x+y)) + \arcsin(y(x+y)) = \pi$.

Решение. Поскольку $\arcsin t \le \frac{\pi}{2}$ при $|t| \le 1$, то левая часть уравнения не превосходит $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Знак равенства возможен, если каждое слагаемое левой части равно $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \arcsin(x(x+y)) = \frac{\pi}{2}, \\ \arcsin(y(x+y)) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x(x+y)) = 1, \\ (y(x+y)) = 1. \end{cases}$$

Решение последней системы не представляет труда.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.