ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Вычисление значений обратных тригонометрических функций

1. Вычислите $\arccos(\cos(2\,\mathrm{arcctg}(\sqrt{2}-1)))$.

2. Докажите, что $\mathrm{arcctg}\frac{1}{3}+\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{3\pi}{4}$.

3. Докажите, что $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}+\mathrm{arctg}\,3=\frac{3\pi}{4}$.

4. Докажите, что $\mathrm{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)=\sqrt{10}-3$.

5. Докажите, что $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

Уравнения с обратными тригонометрическими функциями

1. Решите уравнение $\arcsin(\sin x)=x-2\pi$.

2. Решите уравнение $\arccos(\cos x)=x-\frac{3\pi}{2}$.

3. Решите уравнение $\arcsin 6x+\arcsin 6\sqrt{3}x=-\frac{\pi}{2}$.

4. Решите уравнение $\arccos x=\frac{2}{3}\arcsin 2x$.

5. Решите уравнение $\arccos\left(\frac{3}{4}-x\right)=2\arcsin x$.

6. Решите уравнение $\arccos\left(x+\frac{1}{2}\right)=2\arcsin x$.

7. Решите уравнение $2\,\mathrm{arctg}\,x=\mathrm{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$.

Неравенства с обратными тригонометрическими функциями

1. Решите неравенство $2\arcsin^2 x<3\arcsin x$.
2. Решите неравенство $\arccos^2 x>2\arccos x$.
3. Решите неравенство $64\arcsin^3 x>\arcsin x$.
4. Решите неравенство $27\arccos^3 x\le\arccos x$.
5. Решите неравенство $\mathrm{arctg}^2 x+4\,\mathrm{arctg}\,x-5\ge 0$.
6. Решите неравенство $\mathrm{arcctg}^2 x-5\,\mathrm{arcctg}\,x+6>0$.
7. Решите неравенство $\mathrm{tg}^2(\arcsin x)>1$.
8. Решите неравенство $\arcsin x>\arccos x$.
9. Решите неравенство $\arcsin x<\arccos x$.
10. Решите неравенство $\arccos x\ge\arccos x^2$.
11. Решите неравенство $\arcsin x\le\arcsin x^2$.
12. Решите неравенство $\arcsin x<\arcsin(1-x)$.
13. Решите неравенство $\arccos(1-x)>\arccos x$.
14. Решите неравенство $\arcsin 2x>\arcsin(1-x)$.
15. Решите неравенство $\arccos 2x<\arccos(1-x)$.
16. Решите неравенство $\arcsin 2x+\arccos(1+x)<0$.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Значение $f(\mathrm{arc}\, f(a)) = a$

1. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.
2. $\cos\left(\arccos\frac{2}{7}\right) = \frac{2}{7}$.
3. $\sin(\arcsin 2)$ — не существует.

Значение $\mathrm{arc}\, f(\alpha) = \alpha$

1. $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{9}\right) = \frac{\pi}{9}$.
2. $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\pi}{5}$.
3. $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{9}\right) = \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{5\pi}{9}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{4\pi}{9}$, так как $\frac{4\pi}{9} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. $\arccos\left(\cos\frac{8\pi}{7}\right) = \arccos\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)\right) = \arccos\left(-\cos\frac{\pi}{7}\right) = \pi - \arccos\left(\cos\frac{\pi}{7}\right) = \frac{6\pi}{7}$.
5. $\arccos\left(\cos\frac{13\pi}{7}\right) = \arccos\left(\cos\left(\pi + \frac{6\pi}{7}\right)\right) = \arccos\left(-\cos\frac{6\pi}{7}\right) = \pi - \frac{6\pi}{7} = \frac{\pi}{7}$.
6. $\arcsin(\sin 1) = 1$, 1 радиан $\approx 57^\circ$.
7. $\arcsin(\sin 2) = \arcsin(\sin(\pi - 2)) = \pi - 2$.
8. $\arcsin(\sin 3) = \arcsin(\sin(\pi - 3)) = \pi - 3$.
9. $\arccos(\cos 4) = \arccos(\cos(2\pi - 4)) = 2\pi - 4$.
10. $\arccos(\cos 5) = \arccos(\cos(2\pi - 5)) = 2\pi - 5$.

Более сложные задачи

1. $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = \sin\left(\arcsin\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}\right) = \sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}$.
2. $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right) = \cos\left(\arccos\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}\right) = \cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$.
3. $\cos\left(\mathrm{arctg}\frac{5}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{5}{12}\right)^2}} = \frac{12}{13}$.
4. $\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}\, 2) = \frac{1}{2}$.
5. $\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}(\sqrt{2} - 1)) = \sqrt{2} + 1$.
6. $\sin\left(2\,\mathrm{arctg}\frac{20}{21}\right) = \frac{2 \cdot 20}{21 \cdot \left(1 + \frac{400}{441}\right)} = \frac{40 \cdot 21}{841} = \frac{840}{841}$.

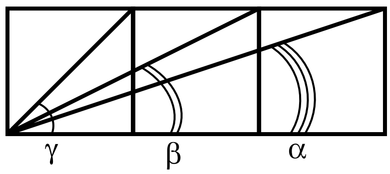
7. Вычислите $\arccos(\cos(2\,\mathrm{arcctg}(\sqrt{2}-1)))$.

$$\arccos(\cos(2\,\mathrm{arcctg}(\sqrt{2}-1))) = \arccos(\cos(2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}+1))) =$$
$$= \arccos\left(\frac{1-(\sqrt{2}+1)^2}{1+(\sqrt{2}+1)^2}\right) = \arccos\left(\frac{-2-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(-\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) =$$
$$= \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})}\right) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Вычисление сумм обратных тригонометрических функций

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}.$$

1. Докажите, что $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3} + \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.



Из рисунка видно, что $\gamma = 45°$, $\beta = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}$, $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{1}{3}$.

Тогда

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \mathrm{arctg}\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}} = 1.$$

Таким образом, $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3} + \mathrm{arctg}\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Докажите, что $\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{3} + \arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{3\pi}{4}$.

Найдем $\sin\left(\mathrm{arcctg}\dfrac{1}{3} + \arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$:

$$\sin\left(\mathrm{arcctg}\frac{1}{3} + \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}\right) = \sin\left(\mathrm{arcctg}\frac{1}{3}\right)\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}\right) + \sin\left(\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\cos\left(\mathrm{arcctg}\frac{1}{3}\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} + \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} =$$
$$= \frac{3\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{5\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{5}}{5\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так как

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} < \arccos\frac{\sqrt{5}}{5} + \mathrm{arcctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

значит, $\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{5} + \mathrm{arcctg}\dfrac{1}{3}$ лежит во второй четверти, а значит,

$$\arccos\frac{\sqrt{5}}{5} + \mathrm{arcctg}\frac{1}{3} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

3. Докажите, что $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)=\sqrt{10}-3$.

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{1}{4}\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{6\pi}{4}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{5}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}{1+\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{1+\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)}}{\sqrt{2}}}{1+\frac{\sqrt{1+\cos\left(\arccos\frac{4}{5}\right)}}{\sqrt{2}}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{1+\frac{4}{5}}}{\sqrt{2}}}{1+\frac{\sqrt{1+\frac{4}{5}}}{\sqrt{2}}}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{\sqrt{10}}}{1+\frac{3}{\sqrt{10}}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{10}+3}}=\sqrt{(\sqrt{10}-3)^2}=|\sqrt{10}-3|.$$

4. Докажите, что $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

Найдем $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}\right)$:

$$\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)+\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)=$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}+\frac{5}{13}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\cdot\sqrt{\frac{144}{169}}+\frac{5}{13}\cdot\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}+\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}=\frac{63}{65}.$$

Таким образом

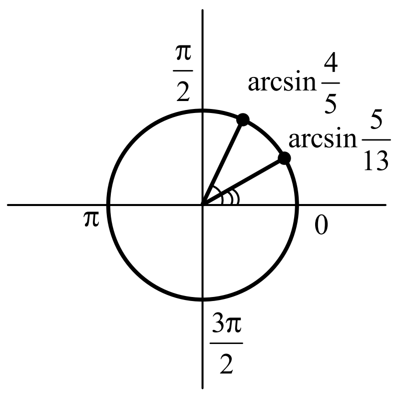
$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}=\left|\arcsin\frac{63}{65}\right|,$$

$$\frac{\pi}{4}<\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi,$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{63}{65}+\arcsin\frac{16}{65}\right)=$$

$$=\sin\left(\arcsin\frac{63}{65}\right)\cos\left(\arcsin\frac{16}{65}\right)+\sin\left(\arcsin\frac{16}{65}\right)\cos\left(\arcsin\frac{63}{65}\right)=$$

$$=\frac{63}{65}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2}+\frac{16}{65}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{63}{65}\right)^2}=\frac{63}{65}\cdot\frac{63}{65}+\frac{16}{65}\cdot\frac{16}{65}=1,$$



значит, $\arcsin\frac{63}{65}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$, то есть $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.
Что требовалось доказать.

5. Докажите, что $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}+\operatorname{arctg}3=\frac{3\pi}{4}$.

Найдем $\sin\left(\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}+\operatorname{arctg}3\right)$:

$$\sin\left(\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}+\operatorname{arctg}3\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+9}}+\frac{3}{\sqrt{1+9}}\cdot\sqrt{1-\frac{4}{5}}=$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{10}}+\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{5}}{5\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}<\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}+\operatorname{arctg}3<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi,$$

значит $\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}+\operatorname{arctg}3$ лежит во второй четверти, а значит,

$$\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}+\operatorname{arctg}3=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\pi}{4}.$$

Что требовалось доказать.

Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями

Основные формулы

$\arcsin x = a$, $|a| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \sin a$, $\arccos x = a$, $|a| \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \cos a$,

$\operatorname{arctg} x = b \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} b$, $\operatorname{arctg} x = b \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} b$.

$$\arcsin x > a,\ |a| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \sin a < x \le 1,$$

$$\arcsin x < a,\ |a| \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \le x < \sin a,$$

$$\arccos x \ge a,\ 0 < a < \pi \Leftrightarrow -1 \le x < \cos a,$$

$$\arccos x < a,\ 0 < a \le \pi \Leftrightarrow \cos a < x \le 1,$$

$$\operatorname{arctg} x > a,\ |a| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x > \operatorname{tg} a,$$

$$\operatorname{arctg} x < a,\ |a| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x < \operatorname{tg} a,$$

$$\operatorname{arcctg} x > a,\ 0 < a < \pi \Leftrightarrow x < \operatorname{ctg} a,$$

$$\operatorname{arcctg} x < a,\ 0 < a < \pi \Leftrightarrow x > \operatorname{ctg} a.$$

Примеры

1. $\arcsin x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
2. $\arcsin x = \frac{5\pi}{6}$ – решений нет, так как $\frac{5\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. $\arcsin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \sin\frac{1}{3}$.
4. $\arccos x = -\frac{1}{7}$ – решений нет, так как $-\frac{1}{7} \notin [0; \pi]$.
5. $\arccos x = \frac{\pi}{7} \Leftrightarrow x = \cos\frac{\pi}{7}$.
6. $\arcsin x > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin\frac{1}{3} < x \le 1$.
7. $\arcsin x \le 5 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.
8. $\arcsin x \ge -2 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.
9. $\arccos x \le \arccos\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le x \le 1$.
10. $\arccos x > \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow -1 \le x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.
11. $\operatorname{arctg} x > -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x > -\sqrt{3}$.
12. $\operatorname{arcctg} x > 2 \Leftrightarrow x < \operatorname{ctg} 2$.

13. Решите неравенство $\operatorname{arcctg}^2 x - 5\operatorname{arcctg} x + 6 > 0$.

Пусть $\operatorname{arcctg} x = t$, $0 < t < \pi$.

Решим уравнение

$$t^2 - 5t + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < 2, \\ t > 3. \end{array}\right.$$

Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{arcctg} x < 2 \\ \operatorname{arcctg} x > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \operatorname{ctg} 2, \\ x < \operatorname{ctg} 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(\operatorname{ctg} 2; \operatorname{ctg} 3)$.

Аналогично:

$$|a| = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \arcsin x > a, \\ \arcsin x < a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin a < x \le 1, \\ -1 \le x < \sin a. \end{cases}$$

$$|a| < \pi \Leftrightarrow \begin{cases} \arccos x > a, \\ \arccos x < a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x < \cos a, \\ \cos a < x \le 1. \end{cases}$$

$$|a| < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{arctg} x > a, \\ \operatorname{arctg} x < a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} a < x, \\ \operatorname{tg} a > x. \end{cases}$$

Аналогично и для $\begin{cases} \operatorname{arcctg} x > a, \\ \operatorname{arcctg} x < a. \end{cases}$

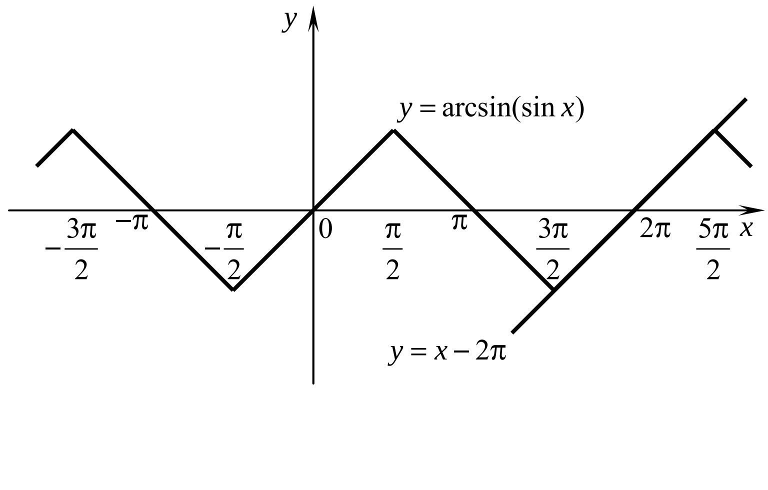
Примеры решения уравнений с обратными тригонометрическими функциями

1. Решите уравнение $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$.

I способ.

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2\pi k, \ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ \pi - x + 2\pi k, \ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Решим задачу графически:



II способ.

$$\arcsin(\sin x) = x - 2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2\pi k = x - 2\pi,\ -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ \pi - x + 2\pi k = x - 2\pi,\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 = 0,\ \dfrac{3\pi}{2} \le x \le \dfrac{5\pi}{2}, \\ x = \dfrac{3\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Решим неравенство

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -1 + 2k \le k \le 2k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \le k \le 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0, \\ k = 1. \end{array}\right.$$

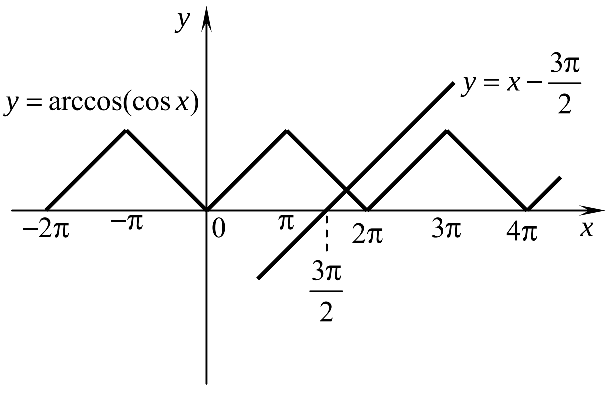
Таким образом, $x = \dfrac{3\pi}{2}$ и $x = \dfrac{5\pi}{2}$.

Ответ: $\left[\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

2. Решите уравнение $\arccos(\cos x) = x - \dfrac{3\pi}{2}$.

$$\cos(\arccos x) = \begin{cases} -x + 2\pi k,\ 2\pi k \le x \le \pi + 2\pi k, \\ x + 2\pi k,\ 2\pi k + \pi \le x \le 2\pi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Решим задачу графически



Таким образом,

$$-x + 2\pi = x - \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 2x = \frac{7\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{4}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

3. Решите уравнение $\arcsin 6x+\arcsin 6\sqrt{3}x=-\frac{\pi}{2}$.

Уравнения с обратными тригонометрическими функциями, как правило, решаются взятием тригонометрической функции от обеих частей уравнения. Это переход к следствию, поэтому необходима проверка найденных решений.

$$\arcsin 6x+\arcsin 6\sqrt{3}x=-\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \arcsin 6x=-\frac{\pi}{2}-\arcsin 6\sqrt{3}x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(\arcsin 6x)=\sin\left(-\frac{\pi}{2}-\arcsin 6\sqrt{3}x\right)\Leftrightarrow \begin{cases}6x=-\cos(\arcsin(6\sqrt{3}x)),\\ -1\le 6x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}6x=-\sqrt{1-(6\sqrt{3}x)^2},\\ -1\le 6x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{1-108x^2}=-6x,\\ -1\le 6x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}-6x\ge 0,\\ -1\le 6x\le 1,\\ 1-\cos x^2=36x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-1\le 6x\le 0,\\ x^2=\frac{1}{144}\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{1}{12}.$$

Проверка:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{12}\right\}$.

4. Решите уравнение $\arccos x=\frac{2}{3}\arcsin 2x$.

$$\arccos x=\frac{2}{3}\arcsin 2x\Leftrightarrow 3\arccos x=2\arcsin 2x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(3\arccos x)=\cos(2\arcsin 2x)\Leftrightarrow \begin{cases}-1\le x\le 1,\\ -1\le 2x\le 1,\\ 4x^3-3x=1-2(2x)^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4x^3+8x^2-3x-1=0,\\ -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x^2+10x+2)=0,\\ -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2x-1)(2x^2+5x+1)=0,\\ -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2},\\ x=\frac{-5+\sqrt{17}}{4},\\ x=\frac{-5-\sqrt{17}}{4},\end{array}\right.\\ -\frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2},\\ x=\frac{-5+\sqrt{17}}{4}.\end{array}\right.$$

Проверка:

1) $x=\frac{1}{2}$: $\arccos\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\arcsin 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$ — верно.

2) $x=\frac{-5+\sqrt{17}}{4}$: $\arccos\frac{-5+\sqrt{17}}{4}=\frac{2}{3}\arcsin\frac{-5+\sqrt{17}}{4}$.

Так как левая часть принадлежит $\left[\frac{\pi}{2};\,\pi\right]$, а правая — $\left[-\frac{\pi}{2};\,0\right]$. Так как промежутки не совпадают, уравнение решений не имеет.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

5. Решите уравнение $\arccos\left(\frac{3}{4}-x\right)=2\arcsin x$.

ОДЗ задается системой:

$$\begin{cases}-1\le\frac{3}{4}-x\le 1,\\ -1\le x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{1}{4}\le x\le\frac{7}{4},\\ -1\le x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le x\le 1.$$

1) Если $0\le x\le 1$: $\arccos\left(\frac{3}{4}-x\right)\ge 0$, $\arcsin x\ge 0$.

Найдем косинусы обеих частей:

$$\begin{cases}0\le x\le 1,\\ \cos\left(\arccos\left(\frac{3}{4}-x\right)\right)=\cos(2\arcsin x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1,\\ \frac{3}{4}-x=1-2x^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1,\\ 8x^2-4x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1,\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{1-\sqrt{3}}{4},\\ x=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

2) Если $-\frac{1}{4}\le x<0$: части уравнения разных знаков, решений нет.

Ответ: $\left\{\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right\}$.

6. Решите уравнение $\arccos\left(x+\frac{1}{2}\right)=2\arcsin x$.

ОДЗ задается системой:

$$\begin{cases}-1\le x+\frac{1}{2}\le 1,\\ -1\le x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{3}{2}\le x\le\frac{1}{2},\\ -1\le x\le 1\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x\le\frac{1}{2}.$$

1) Если $0\le x\le\frac{1}{2}$: $\arccos\left(x+\frac{1}{2}\right)\ge 0$, $\arcsin x\ge 0$.

Найдем косинусы обеих частей:

$$\begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ \cos\left(\arccos\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right) = \cos(2\arcsin x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ x+\dfrac{1}{2} = 1-2\sin^2(\arcsin x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ x+\dfrac{1}{2} = 1-2x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ 4x^2+2x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}, \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

2) Если $-1 \le x < 0$: части уравнения разных знаков, решений нет.

Ответ: $\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right\}$.

7. Решите уравнение $2\operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

Найдем тангенсы обеих частей:

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}\right) \Leftrightarrow \dfrac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \dfrac{2x}{1-x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{2x}{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -1, \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow (-\infty;\,-1) \cup (-1;\,1) \cup (1;\,+\infty).$$

Ответ: $(-\infty;\,-1) \cup (-1;\,1) \cup (1;\,+\infty)$.

Примеры решения неравенств с обратными тригонометрическими функциями

1. Решите неравенство $\arcsin x > \arccos x$.
1) Если $-1 \le x < 0$, то $\arcsin x < 0$, $\arccos > 0$ и неравенство не имеет решений.
2) Если $0 \le x \le 1$, то

$$\sin(\arcsin x) = x,$$
$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Решим систему неравенств

$$\begin{cases} x > \sqrt{1-x^2}, \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 1-x^2, \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 1 > 0, \\ 0 \le x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} < x \le 1.$$

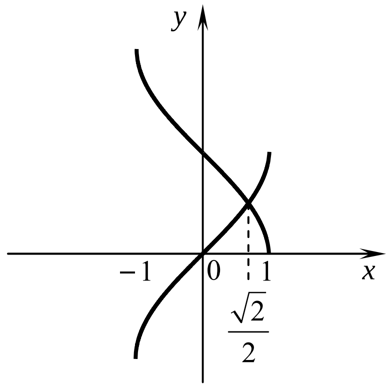
Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right]$.

Примечание: для решения неравенств, связывающих обратные тригонометрические функции обычно вычисляют тригонометрическую функцию от обеих частей неравенства. Требуется, чтобы вычисляемая функция была монотонна на промежутке значений левой и правой частей.

2. Решите неравенство $\arcsin x < \arccos x$.
1) Если $0 < x \le 1$: $\arcsin x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдем синусы обеих частей:

$$\arcsin x < \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le 1, \\ \sin(\arcsin x) < \sin(\arccos x) \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le 1, \\ x < \sqrt{1-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



2) Если $-1 \le x < 0$: $\arcsin x < 0$, $\arccos x > 0$ и решения — все числа из промежутка $[-1; 0)$.

3) При $x = 0$: $0 < \frac{\pi}{2}$ — верно, следовательно, $x = 0$ — решение.

Ответ: $\left[-1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. Решите неравенство $\arccos x \ge \arccos x^2$.

$$\arccos x \ge \arccos x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ x \le x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ x \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow [-1; 0] \cup \{1\}.$$

Ответ: $[-1; 0] \cup \{1\}$.

4. Решите неравенство $\arcsin x \le \arcsin x^2$.

$$\arcsin x \le \arcsin x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ x \le x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ x(x-1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow [-1; 0] \cup \{1\}.$$

Ответ: $[-1; 0] \cup \{1\}$.

5. Решите неравенство $\arcsin x < \arcsin(1-x)$.

$$\arcsin x < \arcsin(1-x) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ x < 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ 2x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x < \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left[-1; \frac{1}{2}\right)$.

6. Решите неравенство $\arccos(1-x) > \arccos x$.

$$\arccos(1-x) > \arccos x \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ 1-x < x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \le 1.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. Решите неравенство $\arcsin 2x > \arcsin(1-x)$.

$$\arcsin 2x > \arcsin(1-x) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ 2x > 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x \le 1.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 1\right]$.

8. Решите неравенство $\arccos 2x < \arccos(1-x)$.

$$\arccos 2x < \arccos(1-x) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ 2x > 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ 3x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x \le 1.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 1\right]$.

9. Решите неравенство $\operatorname{tg}^2(\arcsin x) > 1$.

$$\operatorname{tg}^2(\arcsin x) > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}(\arcsin x) < -1, \\ \operatorname{tg}(\arcsin x) > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2} < \arcsin x < -\frac{\pi}{4}, \\ \frac{\pi}{4} < \arcsin x < \frac{\pi}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right).$$

Ответ: $\left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$.

10. Решите неравенство $\arcsin 2x + \arccos(1+x) < 0$.

$$\arcsin 2x + \arccos(1+x) < 0 \Leftrightarrow \arcsin(-2x) > \arccos(1+x).$$

1) Если $-\frac{1}{2} \le x \le 0$: $\arcsin(-2x) > 0$, $\arccos(1+x) > 0$.

Найдем синусы обеих частей:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \le x \le 0, \\ \sin(\arcsin(-2x)) > \sin(\arccos(1+x)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x \le 0, \\ -2x > \sqrt{1-(1+x)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x \le 0, \\ -2x > \sqrt{-x^2-2x} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x \le 0, \\ -2x \ge 0, \\ -x^2 - 2x < 4x^2, \\ -x^2 - 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \le x \le 0, \\ x \le 0, \\ x(5x+2) > 0, \\ x(x+2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x < -\frac{2}{5}.$$

2) Если $0 < x \le \frac{1}{2}$: $\arcsin(-2x) < 0$, $\arccos(1+x) > 0$, решений нет.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{2}{5}\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

11. Решите неравенство $\arcsin(2-2x) < \arccos 2x$.

ОДЗ задается системой:

$$\begin{cases} -1 \le 2-2x \le 1, \\ -1 \le 2x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}, \\ -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Если $x = \frac{1}{2}$: $0 < 1$ — верно.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

12. Решите неравенство $2\arcsin^2 x < 3\arcsin x$.

$$2\arcsin^2 x < 3\arcsin x \Leftrightarrow 2\arcsin^2 x - 3\arcsin x < 0.$$

Пусть $\arcsin x = t$.

Решим неравенство

$$2t^2 - 3t < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ t < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Таким образом

$$\begin{cases} \arcsin x > 0, \\ \arcsin x < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le 1, \\ -1 \le x < \sin\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

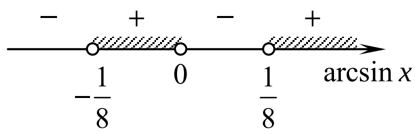
13. Решите неравенство $\arccos^2 x > 2\arccos x$.

$$\arccos^2 x > 2\arccos x \Leftrightarrow \arccos^2 x - 2\arccos x > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \arccos x(\arccos x - 2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\arccos x < 0 \text{ − решений нет,}\\ \arccos x > 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \arccos x > 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}-1 \le x \le 1,\\ -1 \le x < \cos 2\end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x < \cos 2.$$

Ответ: $[-1;\ \cos 2)$.

14. Решите неравенство $64\arcsin^3 x > \arcsin x$.

$$64\arcsin^3 x > \arcsin x \Leftrightarrow \arcsin x(64\arcsin^2 x - 1) > 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \arcsin x\left(\arcsin x - \frac{1}{8}\right)\left(\arcsin x + \frac{1}{8}\right) > 0.$$



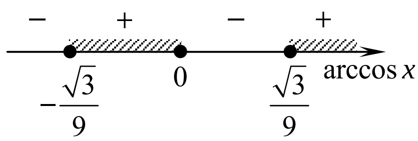
Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\arcsin x < 0,\\ \arcsin x > -\dfrac{1}{8},\end{cases}\\ \arcsin > \dfrac{1}{8}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1 \le x < 0,\\ -\sin\dfrac{1}{8} < x \le 1,\end{cases}\\ \sin\dfrac{1}{8} < x \le 1\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-\sin\dfrac{1}{8} < x < 0,\\ \sin\dfrac{1}{8} < x \le 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left(-\sin\frac{1}{8};\ 0\right) \cup \left(\sin\frac{1}{8};\ 1\right].$$

Ответ: $\left(-\sin\frac{1}{8};\ 0\right) \cup \left(\sin\frac{1}{8};\ 1\right]$.

15. Решите неравенство $27\arccos^3 x \le \arccos x$.

$$27\arccos^3 x \le \arccos x \Leftrightarrow \arccos x(27\arccos^2 x - 1) \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \arccos x\left(\arccos x - \frac{\sqrt{3}}{9}\right)\left(\arccos x + \frac{\sqrt{3}}{9}\right) \le 0.$$



Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\arccos x \le 0,\\ \arccos x \ge -\dfrac{\sqrt{3}}{9},\end{cases}\\ \arccos x \ge \dfrac{\sqrt{3}}{9}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\arccos x \le 0,\\ \arccos x \ge -\dfrac{\sqrt{3}}{9}\end{cases} \text{ − решений нет,}\\ \arccos x \ge \dfrac{\sqrt{3}}{9}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\arccos x \ge \frac{\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow -1 \le x \le \cos\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Ответ: $\left[-1;\ \cos\frac{\sqrt{3}}{9}\right]$.

16. Решите неравенство $\operatorname{arctg}^2 x + 4\operatorname{arctg} x - 5 \ge 0$.

$$\operatorname{arctg}^2 x + 4\operatorname{arctg} x - 5 \ge 0 \Leftrightarrow (\operatorname{arctg} x + 5)(\operatorname{arctg} x - 1) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{arctg} x \le -5, \\ \operatorname{arctg} x \ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\operatorname{tg} 5, \\ x \ge \operatorname{tg} 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-\infty; -\operatorname{tg} 5] \cup [1; +\infty]$.