МЕТОДЫ СРАВНЕНИЯ ЧИСЕЛ

1. Анализ величин, использование формул

а) Сравните числа $\sqrt{26}-\sqrt{6}-\sqrt{2}$ и $\sqrt{35}-\sqrt{17}-\sqrt{5}$.

б) Сравните числа $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ и $3\,999\,999\,999$.

в) Сравните числа $\sin 10^\circ \cos 20^\circ$ и $\sin 40^\circ$.

г) Сравните числа $\sin 45^\circ \cos 15^\circ$ и $\sin 75^\circ$.

д) Сравните числа $\sin 1^\circ \cos 2^\circ$ и $\sin 3^\circ$.

2. Возведение в степень

а) Сравните числа $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}+\sqrt{6}$. **б)** Сравните числа $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ и $\sqrt{8}-\sqrt{7}$.

в) Сравните числа $2^{\sqrt{5}}$ и $3^{\sqrt{3}}$. **г)** Сравните числа $2^{\sqrt{10}}$ и $3^{\sqrt{3}}$.

д) Сравните числа $(\sqrt{2006}-\sqrt{2005}+\sqrt{2004})^{-1}$ и $(\sqrt{2008}+\sqrt{2007}-\sqrt{2006})^{-1}$.

е) Сравните числа $(\sqrt{2005}-\sqrt{2004}+\sqrt{2003})^{-1}$ и $(\sqrt{2007}+\sqrt{2006}-\sqrt{2005})^{-1}$.

3. Использование классических неравенств

- Неравенство Бернулли: $(1+x)^n \ge 1+nx$, для $x \ge -1,\ n\in\mathbb{N}$.
- Неравенство Коши: $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, для $n=2$ имеем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $\dfrac{a_1+a_2}{2} \ge \sqrt{a_1a_2}$.
- Неравенство Коши-Буняковского: $(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+...+y_n^2) \ge (x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n)^2$.

а) Сравните числа: $\sqrt[200]{2}$ и 1,006. **б)** Сравните числа $\sin\dfrac{\pi}{24}+\sqrt{2\cos\dfrac{\pi}{12}+\cos\dfrac{\pi}{24}}$ и 2.

в) Сравните числа: $\left(\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{\pi}{12}\right)\left(\cos^2\dfrac{\pi}{8}+\sin^2\dfrac{\pi}{12}\right)$ и $\dfrac{3+2\sqrt{2}}{16}$.

5. Разделение чисел

а) Сравните числа 31^{11} и 17^{14}. **б)** Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_3 5$.

6. Вычитание

а) Сравните числа $\sin 11$ и $\sin 10$. **б)** Сравните числа $\cos 2$ и $\cos 4$.

в) Сравните числа $\log_{10} 11$ и $\log_{11} 12$. **г)** Сравните числа $\log_{11} 12$ и $\log_{12} 13$.

7. Замена числа буквой

а) Сравним $\dfrac{2^{1999}+1}{2^{2000}+1}$ и $\dfrac{2^{2000}+1}{2^{2001}+1}$. **б)** Сравним $\dfrac{10\ldots01_{(2000\text{ нулей})}}{10\ldots01_{(2001\text{ нуль})}}$ и $\dfrac{10\ldots01_{(2001\text{ нуль})}}{10\ldots01_{(2002\text{ нуля})}}$.

в) Сравним $\sqrt{2005^{2007}2007^{2005}}$ и 2006^{2006}. **г)** Сравним $\sqrt[3]{60}$ и $2+\sqrt[3]{7}$.

8. Использование свойств функций

Например, $x \ge \sin x$ на $[0;+\infty)$; $\operatorname{tg} x \ge x$ на $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\ln x \le x-1$ на $(0;+\infty)$; $e^x \ge x+1$ на $\mathbb{R}$.

а) Сравните числа $\ln\dfrac{3}{2}$ и $\dfrac{1}{2}$. **б)** Сравните числа $\sin\cos 1$ и $\cos\sin 1$.

в) Сравните числа e^π и π^e. **г)** Сравните числа $\log_{2000} 2001$ и $\log_{2001} 2002$.

9. Сравнение площадей

а) Сравните числа $\ln 2$ и 0,75. **б)** Сравните числа $\ln 3$ и 1,5.

Методы сравнения чисел

1. Возведение в натуральную степень

Известно, что если натуральное число n нечётно, то $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$, а если натуральное число n чётно, то справедлива одна из двух возможностей: $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n$ для положительных чисел a и b или $a > b \Leftrightarrow a^n < b^n$ для отрицательных чисел a и b.

Тогда для сравнения заданных чисел одного знака (если заданные числа имеют разные знаки вопрос их сравнения тривиален: положительное больше отрицательного) следует изучить их знаки и провести правильный равносильный переход.

а) Сравним два иррациональных числа: $\sqrt{26} - \sqrt{6} - \sqrt{2}$ и $\sqrt{35} - \sqrt{17} - \sqrt{5}$.

Первое из них положительно, а второе отрицательно. Тем самым первое больше.

б) Сравним числа $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ и $\sqrt{8} - \sqrt{7}$.

Поскольку оба числа одного знака имеем право сравнивать их натуральные степени, а учитывая то, что оба они положительны не будем менять знак сравнения. Последовательно получаем

$$\sqrt{6} - \sqrt{5} \vee \sqrt{8} - \sqrt{7} \Leftrightarrow (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2 \vee (\sqrt{8} - \sqrt{7})^2 \Leftrightarrow 6 + 5 - 2\sqrt{30} \vee 8 + 7 - 2\sqrt{56} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 11 - 2\sqrt{30} \vee 15 - 2\sqrt{56}.$$

Уменьшим теперь каждое из сравниваемых чисел на 11, а затем уменьшим каждое из полученных чисел в два раза:

$$11 - 2\sqrt{30} \vee 15 - 2\sqrt{56} \Leftrightarrow -2\sqrt{30} \vee 4 - 2\sqrt{56} \Leftrightarrow -\sqrt{30} \vee 2 - \sqrt{56}.$$

Теперь увеличим каждое из полученных чисел на сумму $\sqrt{30} + \sqrt{56}$ и рассмотрим полученные числа:

$$-\sqrt{30} \vee 2 - \sqrt{56} \Leftrightarrow \sqrt{56} \vee 2 + \sqrt{30}.$$

Оба они одного знака, причем положительны, и мы имеем право сравнивать их натуральные степени не меняя знака сравнения; возведем их в квадрат, уменьшим сумму на 34 и вновь уменьшим полученные числа в два раза:

$$\sqrt{56} \vee 2 + \sqrt{30} \Leftrightarrow (\sqrt{56})^2 \vee (2 + \sqrt{30})^2 \Leftrightarrow 56 \vee 4 + 30 + 4\sqrt{30} \Leftrightarrow 22 \vee 4\sqrt{30} \Leftrightarrow 11 \vee 2\sqrt{30}.$$

Поскольку в результате преобразований вновь получены положительные числа, имеем право еще раз возвести их в квадрат. Имеем

$$11 \vee 2\sqrt{30} \Leftrightarrow 11^2 \vee (2\sqrt{30})^2 \Leftrightarrow 121 \vee 4 \cdot 30 \Leftrightarrow 121 \vee 120.$$

Итак, выполнением ряда преобразований мы получили, что знак между исходными числами тот же, что и знак между числами 121 и 120. Поэтому поскольку $121 > 120$, $\sqrt{6} - \sqrt{5} > \sqrt{8} - \sqrt{7}$, то есть первое число больше.

Заметим, что исходные числа отличаются друг от друга незначительно, примерно на три сотых, и целью всех вышеприведённых преобразований было сделать это отличие «ощутимее».

в) Сравним теперь два тригонометрических числовых выражения: $\cos 2$ и $\cos 4$.

Предварительно заметим, что оба числа отрицательны, поэтому при возведении в квадрат изменим знак сравнения на противоположный:

$$\cos 2 \vee \cos 4 \Leftrightarrow \cos^2 2 \wedge \cos^2 4 \Leftrightarrow 2\cos^2 2 \wedge 2\cos^2 4 \Leftrightarrow 2\cos^2 2 - 1 \wedge 2\cos^2 4 - 1 .$$

Разумеется, целью преобразований являлось использование формулы $2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$. Тогда

$$2\cos^2 2 - 1 \wedge 2\cos^2 4 - 1 \Leftrightarrow \cos 4 \wedge \cos 8 .$$

Оба полученных числа отрицательны. Вновь меняем знак сравнения при возведении в квадрат, умножим результат на два, и, уменьшив полученные числа на 1, снова используем формулу косинуса двойного угла. Получим:

$$\cos 4 \wedge \cos 8 \Leftrightarrow \cos^2 4 \vee \cos^2 8 \Leftrightarrow \cos 8 \vee \cos 16 .$$

Проведя те же преобразования в третий раз, получим

$$\cos 8 \vee \cos 16 \Leftrightarrow \cos^2 8 \wedge \cos^2 16 \Leftrightarrow \cos 16 \wedge \cos 32 .$$

Поскольку косинус 16 радиан отрицателен, а косинус 32 радиан положителен, и тем самым $\cos 16 < \cos 32$, и учитывая изменение знаков сравнения получаем, что $\cos 2 > \cos 4$. Заметим, что оба исходных числа были чуть меньше нуля, и целью вышеописанных преобразований являлось изменять их так, чтобы получить в конце числа разных знаков.

Проще было сразу рассмотреть разность косинусов и сравнить ее с нулем.

2. Извлечение корня

Помимо сравнения натуральных степеней чисел, есть возможность наоборот сравнивать корни некоторой степени из них. Причем $a^n > b^n \Leftrightarrow |a| > |b|$ для чётных чисел *n*, и $a^n > b^n \Leftrightarrow a > b$ для нечётных *n*.

а) Сравним две степени: $3^{\log_{0,5}^2 3 - 2\log_{0,5} 3}$ и $3^{\log_{0,25}^2 5 - 2\log_{0,25} 5}$.

Сравним логарифмы заданных чисел по основанию 3, поскольку основание больше 1, знак сравнения не изменяется. Имеем

$$3^{\log_{0,5}^2 3 - 2\log_{0,5} 3} \vee 3^{\log_{0,25}^2 5 - 2\log_{0,25} 5} \underset{3>1}{\Leftrightarrow} \log_{0,5}^2 3 - 2\log_{0,5} 3 \vee \log_{0,25}^2 5 - 2\log_{0,25} 5 .$$

Увеличим теперь каждое из сравниваемых чисел на 1 и воспользуемся формулой квадрата разности:

$$\log_{0,5}^2 3 - 2\log_{0,5} 3 + 1 \vee \log_{0,25}^2 5 - 2\log_{0,25} 5 + 1 \Leftrightarrow (\log_{0,5} 3 - 1)^2 \vee (\log_{0,25} 5 - 1)^2 .$$

Извлекая квадратный корень и используя свойства модуля, получаем

$$(\log_{0,5} 3 - 1)^2 \vee (\log_{0,25} 5 - 1)^2 \Leftrightarrow |\log_{0,5} 3 - 1| \vee |\log_{0,25} 5 - 1| \Leftrightarrow 1 - \log_{0,5} 3 \vee 1 - \log_{0,25} 5 .$$

Уменьшим полученные числа на 1 и учтём, что $-\log_{1/a} b = \log_a b$ и что $\log_a b = \log_{a^2} b^2$:

$$1-\log_{0,5} 3 \vee 1-\log_{0,25} 5 \Leftrightarrow -\log_{0,5} 3 \vee -\log_{0,25} 5 \Leftrightarrow \log_2 3 \vee \log_4 5 \Leftrightarrow \log_4 9 \vee \log_4 5 .$$

Сравним степени числа 4 с полученными показателями, поскольку основание больше 1, знак сравнения не изменяется:

$$\log_4 9 \vee \log_4 5 \underset{4>1}{\Leftrightarrow} 9 \vee 5 .$$

И, наконец, поскольку левое из полученных чисел больше правого в силу равносильности всех числовых преобразований мы имеем право сделать вывод, что $3^{\log_{0,5}^2 3-2\log_{0,5} 3} > 3^{\log_{0,25}^2 5-2\log_{0,25} 5}$.

б) Сравним числа $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+1$ и $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}$.

Ясно, что оба заданных числа положительны, но последовательное возведение их в степени явно не лучший способ их сравнения. Однако нетрудно заметить, что $9+4\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^2$, и что $38+17\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^3$. Тогда

$$\sqrt{9+4\sqrt{5}}+1 \vee \sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} \Leftrightarrow 2+\sqrt{5}+1 \vee 2+\sqrt{5} ,$$

и поскольку первое из полученных чисел больше второго, первое из заданных больше второго.

3. Умножение числа на сопряженное

Известна формула сокращенного умножения $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ или для неотрицательных чисел a и b $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$. Будем далее называть числа $a+b$ и $a-b$ сопряженными друг другу. Домножение сравниваемых чисел на сопряженные к ним — зачастую удобный способ уменьшить количество необходимых вычислений.

а) Сравним числа $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ и $\sqrt{8}-\sqrt{7}$.

Умножая и деля каждое из сравниваемых чисел на сопряженные к ним получаем

$$\sqrt{6}-\sqrt{5} \vee \sqrt{8}-\sqrt{7} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})} \vee \frac{(\sqrt{8}-\sqrt{7})(\sqrt{8}+\sqrt{7})}{(\sqrt{8}+\sqrt{7})} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}} \vee \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{7}} .$$

Из двух положительных дробей больше та, знаменатель которой меньше. Но каждое слагаемое знаменателя первой дроби больше соответствующего слагаемого знаменателя второй дроби, откуда ясно, что первое число больше. Задача решена.

4. Использование классических неравенств

Приведем список используемых далее классических неравенств:

Неравенство Бернулли: $(1+x)^n > 1+nx$, для $x \geq -1,\ n \in \mathrm{N}$.

Неравенство Коши: $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$.

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим (случай $n = 2$ в неравенстве Коши): $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, откуда $\left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2$.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца:

$$(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n)^2 .$$

а) Сравним числа: $\sqrt[200]{2}$ и 1,006.

Возведем сравниваемые числа в двухсотую степень:

$$\sqrt[200]{2} \vee 1,006 \Leftrightarrow 2 \vee (1,006)^{200} .$$

Оценим теперь правое число, воспользовавшись неравенством Бернулли:

$$\left(1,006\right)^{200} = \left(1 + 0,006\right)^{200} > 1 + 200 \cdot 0,006 = 2,2 \ > 2 .$$

Таким образом, первое число меньше второго, задача решена.

Другой способ состоит в том, чтобы оценить левое число из неравенства Коши для двухсот чисел: 199 единиц и одной двойки. Оказывается, что левое число меньше 201/200, т. е. меньше 1,005.

б) Сравним числа $\sin\frac{\pi}{24} + \sqrt{2\cos\frac{\pi}{12}} + \cos\frac{\pi}{24}$ и 2.

Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим два раза:

$$\sin\frac{\pi}{24} + \cos\frac{\pi}{24} + \sqrt{2\cos\frac{\pi}{12}} \geq 2\sqrt{\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}} + \sqrt{2\cos\frac{\pi}{12}} = \sqrt{2\sin\frac{\pi}{12}} + \sqrt{2\cos\frac{\pi}{12}} > 2\sqrt[4]{2\sin\frac{\pi}{6}} = 2 .$$

Откуда ответ: сумма тригонометрических выражений больше двух.

в) Сравним числа: $\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{12}\right)$ и $\frac{3 + 2\sqrt{2}}{16}$

Можно попробовать «просто» раскрыть скобки в левой части доказываемого равенства, например, используя формулы понижения порядка, или, скажем, используя формулу $\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$, а можно воспользоваться неравенством Коши-Буняковского-Шварца. Именно, оценим левую часть неравенства:

$$\left(\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{12}\right) \geq \left(\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}\right)^2 \equiv \left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$$

и заметим, что

$$\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{4}\right)^2 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{16} .$$

Отсюда первое число больше.

5. Метод разделения чисел

Идея метода такова: если удается показать, что одно из сравниваемых чисел больше некоторого подобранного, а другое наоборот больше него, то в силу свойства транзитивности неравенств второе число больше первого.

а) Сравним два числа: $\log_2 3$ и $\log_3 5$.

Заметим, что оба числа больше единицы, но меньше двух. Будем подбирать число, которое было бы больше одного из них, но меньше другого. Возьмем, например, $\frac{3}{2}$ и сравним с ним каждое из заданных чисел. Имеем:

$$\log_2 3 > \frac{3}{2}\text{, так как } 3 > 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 3^2 > 2^3,$$

$$\log_3 5 < \frac{3}{2}\text{, так как } 5 < 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow 5^2 < 3^3.$$

Таким образом $\log_2 3 > \log_3 5$.

б) Сравним 31^{11} и 17^{14}.

Вместо того чтобы сравнивать заданные числа друг с другом, сравним каждое из них с числом 16^{14}. Ясно, что $17^{14} > 16^{14}$, в то же время $16^{14} = 2^{56}$, а $2^{56} > 2^{55} = 32^{11} > 31^{11}$. Таким образом $31^{11} < 17^{14}$.

6. Метод вычитания

Удобной возможностью сравнивать числа является изучение знака их разности, либо их разности с одним и тем же числом.

а) Сравним тригонометрические числовые выражения $\sin 11$ и $\sin 10$.

Рассмотрим разность заданных чисел

$$\sin 11 - \sin 10 = 2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{21}{2}.$$

В силу справедливости неравенств

$$\frac{1}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin\frac{1}{2} > 0, \qquad \frac{21}{2} \in \left(3\pi; \frac{7\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\frac{21}{2} < 0$$

получаем, что

$$2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{21}{2} < 0.$$

тогда $\sin 11 - \sin 10 < 0$, значит, $\sin 10 > \sin 11$.

б) Сравним логарифмы: $\log_{10} 11$ и $\log_{11} 12$.

Оба заданных числа близки к единице. Вычитая ее из каждого из них, получим числа близкие к нулю, которые более удобны для сравнения:

$$\log_{10} 11 - 1 = \log_{10} 11 - \log_{10} 10 = \log_{10}\frac{11}{10} = \log_{10}\left(1+\frac{1}{10}\right),$$
$$\log_{11} 12 - 1 = \log_{11} 12 - \log_{11} 11 = \log_{11}\frac{12}{11} = \log_{11}\left(1+\frac{1}{11}\right).$$

Замечая, что

$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{10}\right) > \log_{11}\left(1+\frac{1}{10}\right) > \log_{11}\left(1+\frac{1}{11}\right),$$

получаем, что первое число больше.

7. Замена числа на параметры

Обозначение чисел параметрами с одной стороны расширяет класс решаемых задач, с другой помогает увидеть алгебраическую «специфику» задачи.

а) Сравнить $\sqrt[3]{60}$ и $2+\sqrt[3]{7}$.

Заметим, что $\sqrt[3]{60} = \sqrt[3]{4\cdot(8+7)}$, и пусть $a=2$, $b=\sqrt[3]{7}$. Сравним выражения $\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}$ и $a+b$:

$$\sqrt[3]{4\left(a^3+b^3\right)} \vee a+b \Leftrightarrow 4\left(a^3+b^3\right) \vee (a+b)^3 \Leftrightarrow 3\left(a^3+b^3\right) \vee 3ab(a+b) \Leftrightarrow a^2-ab+b^2 \vee ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \vee 0$$

Так как $a \neq b$, их разность отлична от нуля, а если $(a-b)^2 > 0$, тогда и $\sqrt[3]{60} > 2+\sqrt[3]{7}$.

б) Сравним числа $\dfrac{2^{1999}+1}{2^{2000}+1}$ и $\dfrac{2^{2000}+1}{2^{2001}+1}$.

Тогда пусть A – это будет первое число, а B – второе, и пусть $2^{1999} = n$. Так как $2^{2000} = 2n$, а $2^{2001} = 2^2 n$, то $A = \dfrac{n+1}{2n+1}$, $B = \dfrac{2n+1}{2^2 n+1}$. Рассмотрим их частное:

$$\frac{A}{B} = \frac{n+1}{2n+1}\cdot\frac{2^2 n+1}{2n+1} = \frac{(2n)^2+\left(2^2+1\right)n+1}{(2n)^2+2\cdot 2n+1} > 1.$$

Тогда $A > B$ и, соответственно, $\dfrac{2^{1999}+1}{2^{2000}+1} > \dfrac{2^{2000}+1}{2^{2001}+1}$.

в) Сравним числа $\dfrac{10\ldots01_{(2000\ \text{нулей})}}{10\ldots01_{(2001\ \text{нуль})}}$ и $\dfrac{10\ldots01_{(2001\ \text{нуль})}}{10\ldots01_{(2002\ \text{нуля})}}$.

Обозначим $10\ldots0_{(2000\ \text{нулей})} = n$, и сравним $\dfrac{n+1}{10n+1}$ и $\dfrac{10n+1}{100n+1}$:

$$\frac{n+1}{10n+1} > \frac{10n+1}{100n+1} \Leftrightarrow (n+1)(100n+1) > (10n+1)^2 \Leftrightarrow 101n > 20n \Leftrightarrow 101 > 20.$$

Тогда первое из заданных чисел больше.

8. Использование свойств функций

Монотонность и выпуклость функций на промежутках могут быть использованы как для сравнения чисел, так и для доказательства различных неравенств. Так, для того, чтобы доказать неравенство $f(x) \geq 0$ при $x \geq 0$, достаточно доказать, что $f(0) \geq 0$ и $f'(x) \geq 0$ при $x \geq 0$. А для того, чтобы доказать неравенство $f'(x) \geq 0$ при $x \geq 0$, можно воспользоваться второй производной и так далее.

а) Доказать, что при $x \geq 0$ имеет место неравенство $x \geq \sin x$.

Доказательство: нетрудно, например, проверить, что на промежутке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ функция синус выпукла вверх и ее график лежит не выше касательной к нему, проведенной через точку $(0; 0)$. Также нетрудно проверить, что этой касательной и является прямая $y = x$. Тем самым требуемое неравенство доказано для всех значений переменной из рассматриваемого отрезка. Для всех прочих положительных значений переменной оно выполнено в силу ограниченности функции синус. Что и завершает доказательство.

Примечание: аналогично можно доказать справедливость следующих неравенств:

$\operatorname{tg} x \geq x$ на промежутке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$;

$\ln x \leq x - 1$ на открытом луче $(0; +\infty)$;

$e^x \geq x + 1$ на всей вещественной оси.

б) Сравним числа: $\sin\cos 1$ и $\cos\sin 1$.

Так как $\cos 1 > 0$, имеем

$$\sin\cos 1 < \cos 1.$$

А поскольку функция $y = \cos x$ убывает при $x \in (0; \pi)$ из неравенства $\sin 1 < 1$ следует, что

$$\cos\sin 1 > \cos 1.$$

Таким образом $\sin\cos 1 < \cos\sin 1$.

в) Доказать, что при $x \ge 0$ имеет место неравенство $\sin x \ge x - \frac{x^3}{6}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$. Имеем: $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, $f'(0) = 0$, $f''(x) = -\sin x + x$. Но при $x \ge 0$ неравенство $x \ge \sin x$ верно, значит, $f''(x) \ge 0$ при $x \ge 0$. Тогда $f'(x) \ge 0$, и тогда $f(x) \ge 0 \Leftrightarrow \sin x - x + \frac{x^3}{6} \ge 0$. Что и требовалось доказать.

г) Сравнить числа $\sin 1$ и $\frac{5}{6}$.

Поскольку $\sin x \ge x - \frac{x^3}{6}$ ясно, что $\sin 1 > \frac{5}{6}$.

д) Сравним числа e^π и π^e.

$$e^\pi \vee \pi^e \Leftrightarrow \ln e^\pi \vee \ln \pi^e \Leftrightarrow \pi \ln e \vee e \ln \pi \Leftrightarrow \frac{\ln e}{e} \vee \frac{\ln \pi}{\pi}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ и сравним $f(\pi)$ и $f(e)$. Эта функция определена при $x > 0$ и имеет наибольшее значение при $x = e$ (доказательство с использованием производной). Тогда $f(\pi) < f(e)$ или $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{1}{e}$, откуда $e^\pi > \pi^e$.

Можно было рассмотреть другую функцию: $\varphi(x) = x - e\ln x; \varphi(e) = 0.$ Берем производную $\varphi'(x) = 1 - \frac{e}{x} \ge 0$ при $x \ge e$. Значит, $\varphi(x)$ возрастает и $\varphi(\pi) > 0$ то есть $\pi - e\ln \pi > 0$, откуда $e^\pi > \pi^e$.

Существует ещё один способ решения этой задачи. Возведём обе части выражения в степень $\frac{1}{\pi e}$. Имеем:

$$e^\pi \vee \pi^e \Leftrightarrow e^{\frac{1}{e}} \vee \pi^{\frac{1}{\pi}}.$$

Рассмотрим функцию $y = x^{\frac{1}{x}}$. Прологарифмируем её по основанию *e*, имеем

$\ln y = \ln x^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{x}\ln x$. Тогда

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$$

и

$$y' = \frac{y}{x^2}(1 - \ln x) = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2}(1 - \ln x).$$

При $x > e$ найденная производная отрицательна, а функция $y = x^{\frac{1}{x}}$ на этом промежутке убывает, тогда $\pi^{\frac{1}{\pi}} < e^{\frac{1}{\pi}}$ (так как $\pi > e$) или $e^\pi > \pi^e$.

е) Сравнить $\lg_{2000} 2001$ и $\lg_{2001} 2002$.

Пусть $f\left(x\right)=\lg_{x}\left(x+1\right)$, сравним $f\left(2000\right)$ и $f\left(2001\right)$. Найдем промежутки монотонности введенной функции. Ясно, что $f(x)$ имеет те же промежутки монотонности, что и $f\left(x\right)-1$.

$$f(x)-1=\lg_{x}\left(x+1\right)-1=\lg_{x}\left(x+1\right)-\lg_{x} x=\lg_{x}\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lg_{x}\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

При $x>1$ основание логарифма возрастает, а выражение $1+\frac{1}{x}$ убывает, тогда $\log_{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)$ убывает, и $f\left(x\right)$ убывает на $\left(1;+\infty\right)$. Тогда

$$f\left(2000\right)>f\left(2001\right)\Leftrightarrow \lg_{2000} 2001>\lg_{2001} 2002.$$