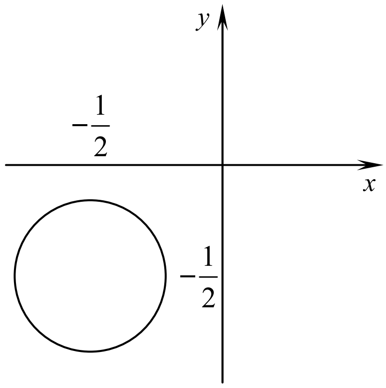
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПРЕТАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ

Решение многих алгебраических уравнений, неравенств и систем упрощается, если придать входящим в них выражениям геометрический смысл. Например, изобразить соответствующие уравнению кривые или области в системе декартовых координатах, истолковать уравнение как соотношение между элементами геометрической фигуры или интерпретировать заданное выражение виде соотношение между векторами.

Уравнения и множества на плоскости

1. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ x+y+z=a \end{cases}$ имеет единственное решение.

$$\begin{cases} x^2+x+y^2+y=a, \\ z=a-x-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=a+\dfrac{1}{2}, \quad (*) \\ z=a-x-y. \end{cases}$$



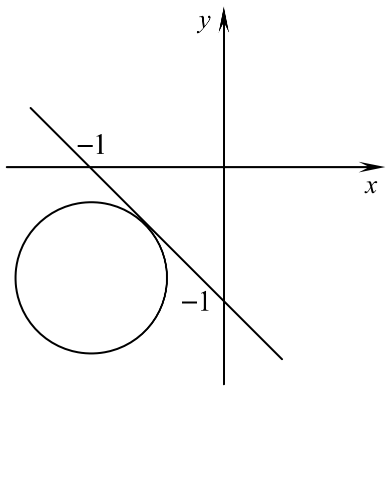
Система имеет единственное решение, если первое уравнение имеет единственное решение.

Уравнение (*) имеет единственное решение при $a \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, если $a=-\frac{1}{2}$, $z=-\frac{1}{2}$.

Примечание: заданная система не имеет решений, если $a<-\frac{1}{2}$, и имеет бесконечно много решений, если $a>-\frac{1}{2}$.

2. При каких значениях параметра a найдутся такие вещественные числа $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению $\sqrt{2xy+a}=x+y+1$?

$$\begin{cases} x+y+1 \ge 0, \\ 2xy+a=x^2+y+1+2xy+2y+2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -1-x, \\ (x+1)^2+(y+1)^2=a+1. \end{cases}$$



Уравнение системы задает окружность радиуса $\sqrt{a+1}$, $a \ge -1$ с центром в точке $(-1; -1)$.

Выясним, при каких значениях параметра a окружность и полуплоскость будут иметь общие точки.

$$R \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{a+1} \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a \ge -\frac{1}{2}.$$

Домашнее задание: При каких значениях параметра b найдутся числа (x, y), удовлетворяющие уравнению $\sqrt{b-2xy}=y-x+2$?
Ответ: $b \ge -2$.

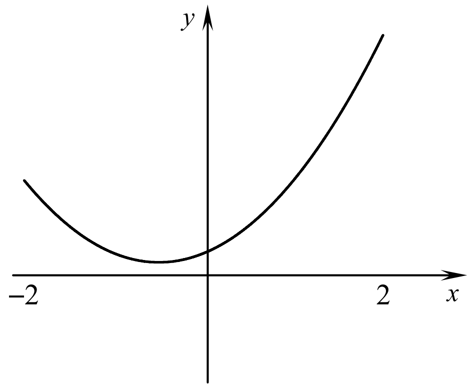
3. Среди всех решений неравенства $y \geq x^2 + x + 1$ найдите те, для которых $y - 2x$ принимает наименьшее значение.

Пусть $y - 2x = c$, тогда $y = c + 2x$.

Значение параметра c наименьшее, если прямая является касательной к параболе.

Условие касания: $c + 2x = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - c = 0$ должно иметь единственное решение только при $D = 0$.

Решим уравнение



$$D = 0 \Leftrightarrow 1 - 4(c+1) = 0 \Leftrightarrow 4c - 3 = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}.$$

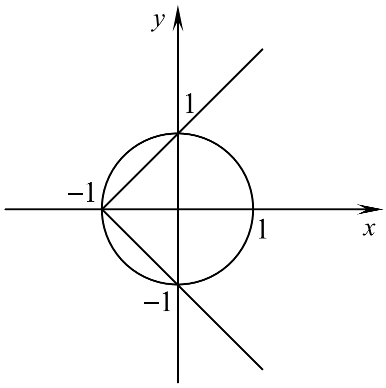
Пусть $c = \frac{3}{4}$, тогда $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{7}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right)$.

Домашнее задание: при каких значениях параметра a система $\begin{cases} x + y = a, \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ: $a = \frac{3}{4}$.

4. При каких значениях параметра b система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ |y| = b + x \end{cases}$ имеет три решения?



Ответ: $b = 1$.

Домашнее задание: при каких значениях параметра a существует такое r что система $\begin{cases} 3|x| + |y| = 3, \\ (x-a)^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$ имеет три решения?

Указание: первое уравнение — ромб.

Векторная интерпретация

Напоминание: пусть $\vec{a}$ имеет координаты $(x_a;\ y_a)$, а $\vec{b}$ — $(x_b;\ y_b)$, тогда

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}\ ;$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{x_b^2 + y_b^2}\ ;$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\cdot\vec{b}) = x_a x_b + y_a y_b\ ;$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

1. Доказать, что для любых $x,\ y,\ z$: $\sin x\cdot\cos x\cdot\cos z + \cos x\cdot\sin y\cdot\sin z \le 1$.

Пусть $\vec{a} = (\sin x;\ \cos x)$; $\vec{b} = (\cos y\cdot\cos z;\ \sin y\cdot\sin z)$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = 1;$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{\cos^2 y\cdot\cos^2 z + \sin^2 y\cdot\sin^2 z} \le \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1;$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}| \le 1.$$

Что и требовалось доказать.

2. Среди всех решений системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ z^2 + u^2 = 9, \\ xu + yz \ge 6 \end{cases}$ найдите то, при котором значение суммы $x + z$ будет наибольшим.

Пусть $|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 = 4$; $|\vec{b}|^2 = u^2 + z^2 = 9$.

$$6 \le xu + yz = \vec{a}\cdot\vec{b} \le 2\cdot 3 \Leftrightarrow xu + yz = 6.$$

Так как $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha \Leftrightarrow \cos(\vec{a};\ \vec{b}) = 1$. Вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарные: $\vec{a} = k\cdot\vec{b}$, следовательно, $(x; y) = k(u; z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = ku, \\ y = kz. \end{cases}$

$$k^2u^2 + k^2z^2 = 4 \Leftrightarrow k^2(u^2 + z^2) = 4 \Leftrightarrow 9k^2 = 4 \Leftrightarrow k^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \frac{2}{3}, \\ k = -\frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Рассмотрим уравнение (3):

$$ku\cdot u + kz\cdot z = 6 \Leftrightarrow k(u^2 + z^2) = 6 \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}.$$

Таким образом

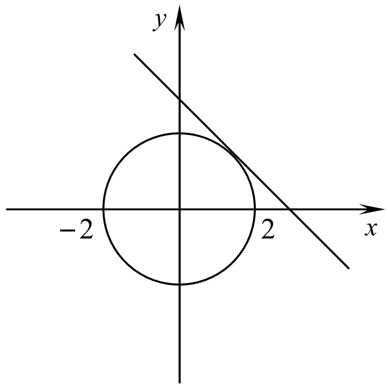
$$\vec{a} = (x;\ y);$$
$$\vec{b} = \left(\frac{2}{3}x;\ \frac{2}{3}y\right).$$

Наибольшее значение суммы $x+z$ равно наибольшему значению суммы $x+\frac{3}{2}y$.

$$\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}y,\\ y=\frac{2}{3}z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{3}{2}x,\\ z=\frac{3}{2}y.\end{cases}$$

Пусть $x+\frac{2}{3}y=c$, тогда $y=\frac{3}{2}c-\frac{3}{2}x$.

Определим, при каких значениях параметра c уравнение $x^2+\left(\frac{3}{2}c-\frac{3}{2}x\right)^2=4$ имеет единственное решение. Уравнение $x^2+\left(\frac{3}{2}c-\frac{3}{2}x\right)^2=4$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда дискриминант равен нулю.



$$D=0\Leftrightarrow x=\frac{4}{\sqrt{13}},$$

тогда $y=\frac{6}{\sqrt{13}};\ z=\frac{9}{\sqrt{13}};\ u=\frac{6}{\sqrt{13}}$.

Домашнее задание: найти наибольшее значение выражения $S=|y|\sqrt{1-x^2}+|x|\sqrt{16-y^2}$.

Указание: записать вектора в координатах $\vec{a}=(|y|;\sqrt{16-y^2})$; $\vec{b}=(\sqrt{1-x^2};|x|)$.

Ответ: 4.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases}x^8+y^8+z^8=1,\\ x^4-2y^4+3z^4=\sqrt{42}.\end{cases}$

Пусть $\vec{a}\{x^4;\ y^4;\ z^4\}$, $\vec{b}\{1;-2;3\}$.

Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x^4-2y^4+3z^4,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{x^8+y^8+z^8}\cdot\sqrt{14}\cdot\cos\varphi\Leftrightarrow\sqrt{42}=\sqrt{1}\cdot\sqrt{14}\cdot\cos\varphi\Leftrightarrow\cos\varphi=\frac{\sqrt{42}}{\sqrt{14}}=\sqrt{3}\ —$$

— ложно.

Следовательно, система решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

5. Решите систему уравнений $\begin{cases}\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3,\\ x+y+z=3,\\ \frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=3.\end{cases}$

Пусть $\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$, $\vec{b}\left\{\frac{1}{y};\frac{1}{z};\frac{1}{x}\right\}$, $\vec{c}\left\{\frac{1}{z};\frac{1}{x};\frac{1}{y}\right\}$, $\vec{d}\{1;1;1\}$.

Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3 \ (1),$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=3 \ (2),$$

$$\vec{a}\cdot\vec{d}=x+y+z=3,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot\vec{b}=3\Rightarrow \vec{a}=\vec{c}=\vec{d}=\sqrt{3}.$$

Из (1) и (2) следует:

$$\vec{b}=\vec{c}\Rightarrow b=c\Rightarrow \frac{1}{y}=\frac{1}{z}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=y=z=1.$$

Ответ: $\{(1;\,1;\,1)\}$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases}3x+4y=26,\\ \sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}+\sqrt{x^2+y^2-20x-10y+125}=10.\end{cases}$

Преобразуем подкоренные выражения:

$$\sqrt{x^2+y^2-4x+2y+5}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} \ (1),$$

$$\sqrt{x^2+y^2-20x-10y+125}=\sqrt{(x-10)^2+(y-5)^2} \ (2).$$

Пусть $M(x;\,y)$, $A(2;\,-1)$, $B(10;\,5)$, $(1)=AM$, $(2)=BM$.

Тогда

$$AB=\sqrt{64+36}=10\Rightarrow M\in[AB],$$

$$|AM|+|MB|=|AB|.$$

При $2\le x\le 10$ и при $-1\le y\le 5$, уравнение AB принимает вид

$$\begin{cases}-1=2k+b,\\ 5=10k+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{3}{4},\\ b=-\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow y=\frac{3}{4}x-\frac{5}{2}\Rightarrow 4y=3x-10.$$

Таким образом,

$$\begin{cases}3x-4y=10,\\ 3x+4y=26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6,\\ y=2.\end{cases}$$

Ответ: $\{(6;\,2)\}$.

7. Докажите, что неравенство $\sqrt{5x+1}+\sqrt{6x+1}+\sqrt{1-11x}\le 3$ выполняется при всех x из области допустимых значений.

Пусть $\vec{a}\{\sqrt{5x+1};\,\sqrt{6x+1};\,\sqrt{1-11x}\}$; $\vec{a}$ существует, если $-\frac{1}{6}\le x\le\frac{1}{11}$.

Пусть $\vec{b}\{1;\,1;\,1\}$;

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\cos\varphi|\Leftrightarrow|\cos\varphi|\le 1.$$

Тогда $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$

$$1\cdot\sqrt{5x+1}+1\cdot\sqrt{6x+1}+1\cdot\sqrt{1-11x}\le\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{5x+1+6x+1+1-11x}\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{6x+1}+\sqrt{1-11x}\le\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{5x+1}+\sqrt{6x+1}+\sqrt{1-11x}\le 3\,.$$

Что и требовалось доказать.

Домашнее задание

1. Решите уравнение $x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2-14x-10y+58=0, \\ \sqrt{x^2+y^2-16x-12y+100}+x^2+y^2+4x-20y+104=2\sqrt{29}. \end{cases}$

Тригонометрические подстановки

1. Решите уравнение $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=x^2+2$.

I способ.

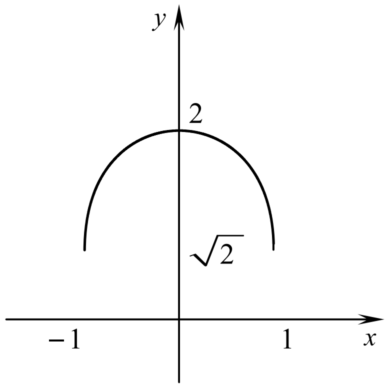
Наибольшее значение функции $f(x)=\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}$ достигается в точке $x_0=\dfrac{-a+b}{2}$.

II способ.

По смыслу задачи: $-1\le x\le 1$.

Пусть $x=\cos\gamma$, $-\pi\le\gamma\le\pi$ или $0\le\gamma\le\pi$.

Решим уравнение



$$\sqrt{1+\cos\gamma}+\sqrt{1-\cos\gamma}=\cos^2\gamma+2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{2\cos^2\frac{\gamma}{2}}+\sqrt{2\sin^2\frac{\gamma}{2}}=\cos^2\gamma+2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{2}\left|\cos\frac{\gamma}{2}\right|+\sqrt{2}\left|\sin\frac{\gamma}{2}\right|=\cos^2+2\Leftrightarrow\sqrt{2}\left(\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)=2+\cos^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sqrt{2})^2\sin\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=2+\cos^2\gamma\,.$$

Решение существует, если левая и правая части равны 2.

$$\begin{cases} \cos^2\gamma=0, \\ \sin\left(\dfrac{\gamma}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)=1 \end{cases}\Leftrightarrow\gamma=\frac{\pi}{2}.$$

Тогда $x=\cos\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=0$.

Ответ: 0.

2. Решить уравнение $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$.

По смыслу задачи: $-1\le x\le 1$.

Пусть $x=\cos\gamma$, $-\pi\le\gamma\le\pi$ или $0\le\gamma\le\pi$.

Решим уравнение

$$\sqrt{1-\cos\gamma}=2\cos^2\gamma-1+2\cos\sqrt{1-\cos^2\gamma}\Leftrightarrow\sqrt{1-\cos\gamma}=\cos2\gamma+2\,|\sin\gamma\,|\cos\gamma\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1-\cos\gamma}=\cos2\gamma+\sin2\gamma\Leftrightarrow\sqrt{2}\left|\sin\frac{\gamma}{2}\right|=\sqrt{2}\sin\left(2\gamma+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\left(2\gamma+\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{\gamma}{2}=2\gamma+\dfrac{\pi}{4}+2\pi k\\ \dfrac{\gamma}{2}=\pi-\left(2\gamma+\dfrac{\pi}{4}\right)+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\gamma=\frac{3\pi}{10}.$$

Таким образом $x=\cos\dfrac{3\pi}{10}$.

Ответ: $\left\{\cos\dfrac{3\pi}{10}\right\}$.

Если в уравнении или неравенстве переменная может принимать значения только из промежутка $[-1;1]$, а выражение с переменной напоминает тригонометрические формулы, то можно ввести новую переменную, синус или косинус аргумента.